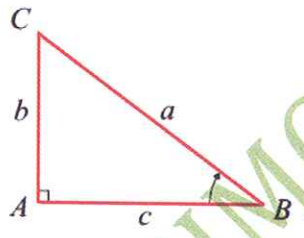
Τριγωνομετρία

1. Ορισμοί

Σε ένα τρίγωνο ABC με ορθή γωνία (90^0) στο A, ορίζονται οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας B ορίζονται ως εξής:



Ημίτονο: $\sin B = \frac{b}{a}$

Συνημίτονο: $\cos B = \frac{c}{a}$

Εφαπτομένη: $\tan B = \frac{b}{c}$

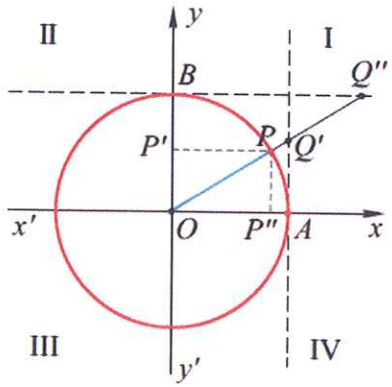
Συνεφαπτομένη: $\cot B = \frac{c}{b}$

Τέμνουσα: $\sec B = \frac{a}{c}$

Συντέμνουσα: $\csc B = \frac{a}{b}$.

2. Τριγωνομετρικός Κύκλος

Σε ένα σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων οι άξονες έχουν θετικές κατευθύνσεις από x' προς x και από y' προς y. Ο κύκλος με κέντρο το O και ακτίνα 1 καλείται *τριγωνομετρικός κύκλος*. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί του τόξου $\tau = \widehat{AP}$ ορίζονται από τις συντεταγμένες x και y του σημείου P, ως εξής:



Ημίτονο: $\sin\tau = OP' = y, -1 \leq \sin\tau \leq 1$

Συνημίτονο: $\cos\tau = OP'' = x, -1 \leq \cos\tau \leq 1$

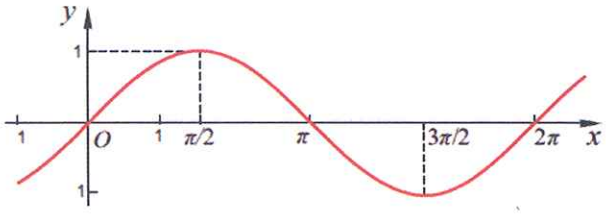
Εφαπτομένη: $\tan\tau = AQ' = \frac{y}{x}, -\infty \leq \tan\tau \leq \infty$

Συνεφαπτομένη: $\cot\tau = BQ'' = \frac{x}{y}, -\infty \leq \cot\tau \leq \infty$

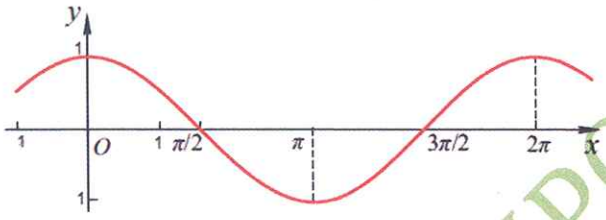
Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί του τόξου $\tau = \widehat{AP}$ ταυτίζονται με εκείνους της γωνίας $\varphi = \widehat{AOP}$. Οι προηγούμενοι ορισμοί ισχύουν και για τόξα (ή γωνίες) μεγαλύτερες

από 90^0.

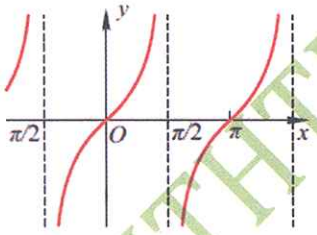
3. Γραφικές Παραστάσεις



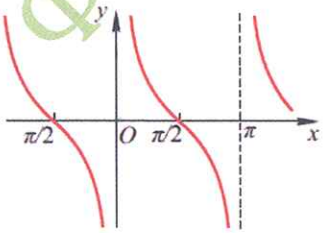
$y = \sin x$



$y = \cos x$



$y = \tan x$



$y = \cot x$

4. Τιμές Τριγωνομετρικών Συναρτήσεων (Γωνίες 1ου Τεταρτημορίου)

x (μοίρες)	x (ακτίνια)	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
0^0	0	0	1	0	∞
15^0	$\pi/12$	$(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4$	$(\sqrt{6}+\sqrt{2})/4$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
30^0	$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
45^0	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1
60^0	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$
75^0	$5\cdot\pi/12$	$(\sqrt{6}+\sqrt{2})/4$	$(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$
90^0	$\pi/2$	1	0	$\pm\infty$	0

5. Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

I. Βασικές

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} - \tan^2 x = 1$$

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \cot^2 x = 1$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$

II. Μετασχηματισμοί

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

$$\cot(-x) = -\cot x$$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos x$
$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x$
$\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cot x$	$\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\cot x$
$\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \tan x$	$\cot\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\tan x$

$\sin(\pi - x) = \sin x$ $\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\tan(\pi - x) = -\tan x$ $\cot(\pi - x) = -\cot x$	$\sin(\pi + x) = -\sin x$ $\cos(\pi + x) = -\cos x$ $\tan(\pi + x) = \tan x$ $\cot(\pi + x) = \cot x$
$\sin\left(\frac{3\cdot\pi}{2} - x\right) = -\cos x$ $\cos\left(\frac{3\cdot\pi}{2} - x\right) = -\sin x$ $\tan\left(\frac{3\cdot\pi}{2} - x\right) = \cot x$ $\cot\left(\frac{3\cdot\pi}{2} - x\right) = \tan x$	$\sin\left(\frac{3\cdot\pi}{2} + x\right) = -\cos x$ $\cos\left(\frac{3\cdot\pi}{2} + x\right) = \sin x$ $\tan\left(\frac{3\cdot\pi}{2} + x\right) = -\cot x$ $\cot\left(\frac{3\cdot\pi}{2} + x\right) = -\tan x$
$\sin(2\cdot\pi - x) = -\sin x$ $\cos(2\cdot\pi - x) = \cos x$ $\tan(2\cdot\pi - x) = -\tan x$ $\cot(2\cdot\pi - x) = -\cot x$	$\sin(2\cdot\pi + x) = \sin x$ $\cos(2\cdot\pi + x) = \cos x$ $\tan(2\cdot\pi + x) = \tan x$ $\cot(2\cdot\pi + x) = \cot x$

III. Διαφορές - Αθροίσματα

$\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y$ $\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$ $\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$ $\cot(x - y) = \frac{\cot x \cdot \cot y + 1}{\cot x - \cot y}$
$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$ $\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$ $\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$ $\cot(x + y) = \frac{\cot x \cdot \cot y - 1}{\cot x + \cot y}$
$\sin x - \sin y = 2 \cdot \cos\left(\frac{x + y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x - y}{2}\right)$ $\cos x - \cos y = 2 \cdot \sin\left(\frac{x + y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{y - x}{2}\right)$ $\tan x - \tan y = \frac{\sin(x - y)}{\cos x \cdot \cos y}$ $\cot x - \cot y = \frac{\sin(x + y)}{\sin x \cdot \sin y}$

$\sin x + \sin y = 2 \cdot \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ $\cos x + \cos y = 2 \cdot \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$ $\tan x + \tan y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y}$ $\cot x + \cot y = \frac{\sin(y-x)}{\sin x \cdot \sin y}$
$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} \cdot [\cos(x-y) - \cos(x+y)]$ $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} \cdot [\cos(x-y) + \cos(x+y)]$ $\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} \cdot [\sin(x-y) + \sin(x+y)]$
$\sin^2 x - \sin^2 y = \sin(x+y) \cdot \sin(x-y)$ $\cos^2 x - \cos^2 y = \sin(x+y) \cdot \sin(y-x)$ $\cos^2 x - \sin^2 y = \cos(x+y) \cdot \cos(x-y)$

IV. Πολλαπλές Γωνίες

$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$
$\sin(2 \cdot x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$ $\cos(2 \cdot x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cdot \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \cdot \sin^2 x$
$\sin(2 \cdot x) = \frac{2 \cdot \tan x}{1 + \tan^2 x}$ $\cos(2 \cdot x) = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$ $\tan(2 \cdot x) = \frac{2 \cdot \tan x}{1 - \tan^2 x}$
$\sin(3 \cdot x) = 3 \cdot \sin x - 4 \cdot \sin^3 x$ $\cos(3 \cdot x) = -3 \cdot \cos x + 4 \cdot \cos^3 x$ $\tan(3 \cdot x) = \frac{3 \cdot \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \cdot \tan^2 x}$
$\sin(4 \cdot x) = 4 \cdot \sin x \cdot \cos x - 8 \cdot \sin^3 x \cdot \cos x$ $\cos(4 \cdot x) = -8 \cdot \cos^2 x + 8 \cdot \cos^4 x + 1$ $\tan(4 \cdot x) = \frac{4 \cdot \tan x - 4 \cdot \tan^3 x}{1 - 6 \cdot \tan^2 x + \tan^4 x}$

$$\sin(n\cdot x)=\sin x\cdot\left\{2^{n-1}\cdot\cos^{n-1}x-\binom{n-2}{1}\cdot 2^{n-3}\cdot\cos^{n-3}x+\right.$$
$$\left.+\binom{n-3}{2}\cdot 2^{n-5}\cdot\cos^{n-5}x-\cdots\right\}$$
$$\cos(n\cdot x)=2^{n-1}\cdot\cos^{n}x-\frac{n}{1}\cdot 2^{n-3}\cdot\cos^{n-2}x+\frac{n}{2}\cdot\binom{n-3}{1}\cdot 2^{n-5}\cdot\cos^{n-4}x-$$
$$-\frac{n}{3}\cdot\binom{n-4}{2}\cdot 2^{n-7}\cdot\cos^{n-6}x+\cdots$$

V. Δυνάμεις

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos(2\cdot x)}{2}$$
$$\cos^2 x=\frac{1-\cos(2\cdot x)}{2}$$

$$\sin^3 x=\frac{3\cdot\sin x-\sin(3\cdot x)}{4}$$
$$\cos^3 x=\frac{3\cdot\cos x+\cos(3\cdot x)}{4}$$

$$\sin^4 x=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cdot\cos(2\cdot x)+\frac{1}{8}\cdot\cos(4\cdot x)$$
$$\cos^4 x=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cdot\cos(2\cdot x)+\frac{1}{8}\cdot\cos(4\cdot x)$$

$$\sin^{2\cdot n-1}x=\frac{(-1)^{n-1}}{2^{2\cdot n-2}}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\cdot\binom{2\cdot n-1}{k}\sin[(2\cdot n-2\cdot k-1)\cdot x]$$
$$\cos^{2\cdot n-1}x=\frac{1}{2^{2\cdot n-2}}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2\cdot n-1}{k}\cos[(2\cdot n-2\cdot k-1)\cdot x]$$

$$\sin^{2\cdot n}x=\frac{1}{2^n}\cdot\binom{2\cdot n}{n}+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{2\cdot n-1}}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\cdot\binom{2\cdot n}{k}\cos[2\cdot(n-k)\cdot x]$$
$$\cos^{2\cdot n}x=\frac{1}{2^n}\cdot\binom{2\cdot n}{n}+\frac{1}{2^{2\cdot n-1}}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2\cdot n}{k}\cos[2\cdot(n-k)\cdot x]$$