Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις 1ης Τάξης 1ου Βαθμού (Σύνοψη)

1. Σ.Δ.Ε. Χωριζομένων Μεταβλητών

(1) Μορφή: $g(y)\,dy = f(x)\,dx$

(2) Γενική Λύση $y(x)$: $\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx + c.$

2. Σ.Δ.Ε. Αναγόμενες σε Χωριζομένων Μεταβλητών

I. Σ.Δ.Ε. της Μορφής $y'(x) = f(a \cdot x + b \cdot y + c)$

(1) Μετασχηματισμός: $a \cdot x + b \cdot y(x) + c = u(x)$

(2) Παραγώγιση του Μετασχηματισμού: $y'(x) = \dfrac{u'(x) - a}{b}$

(3) Αντικατάσταση στην αρχική Σ. Δ. Ε.

(4) Αναγωγή στη νέα Σ. Δ. Ε. : $\dfrac{1}{b \cdot f(u) + a}\,du = dx$

(Σ. Δ. Ε. Χωριζομένων Μεταβλητών)

(5) Γενική Λύση $u(x)$ της τελευταίας Σ. Δ. Ε.:

$$\int \frac{1}{b \cdot f(u) + a}\,du = \int dx + k$$

(6) Επαναφορά στο Μετασχηματισμό του Βήματος 1

(7) Γενική Λύση $y(x)$ της αρχικής Σ. Δ. Ε..

II. Ομογενείς Σ.Δ.Ε.

(1) Μορφή: $y'(x) = \dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}$

ΦΟΙΤΗΤΙΚΟ ΠΡΟΣΗΜΟ

(2) Έλεγχος ότι οι συναρτήσεις $M(x,y)$ και $N(x,y)$ είναι ομογενείς ως προς x και y με τον ίδιο ακριβώς βαθμό ομογένειας n, δηλαδή:

$$\begin{cases} M(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) = \lambda^n \cdot M(x,y) \\ N(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) = \lambda^n \cdot N(x,y) \end{cases}$$

(3) Μετασχηματισμός: $\dfrac{y(x)}{x} = u(x)$ ή $y(x) = x \cdot u(x)$

(4) Παραγώγιση του Μετασχηματισμού: $y'(x) = u(x) + x \cdot u'(x)$

(5) Αντικατάσταση στην αρχική Σ. Δ. Ε.

(6) Αναγωγή στη νέα Σ. Δ. Ε. : $\dfrac{1}{\dfrac{M(1,u)}{N(1,u)} - u}\, du = \dfrac{1}{x}\, dx$

(Σ. Δ. Ε. Χωριζομένων Μεταβλητών)

(7) Γενική Λύση $u(x)$ της τελευταίας Σ. Δ. Ε.:

$$\int \left[\frac{1}{\dfrac{M(1,u)}{N(1,u)} - u} \right] du = \int \frac{1}{x}\, dx + c$$

(8) Επαναφορά στο Μετασχηματισμό του Βήματος 3

(9) Γενική Λύση $y(x)$ της αρχικής Σ. Δ. Ε..

III. Σ.Δ.Ε. της Μορφής $y'(x) = f\left(\frac{a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1}{a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2}\right)$

<u>Περίπτωση 1</u>:

(1) Αν $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, τότε $\begin{cases} a_1 = k \cdot a_2 \\ b_1 = k \cdot b_2 \end{cases}$

(2) Μορφή της αρχικής Σ. Δ. Ε. : $y'(x) = f\left(\dfrac{k \cdot (a_2 \cdot x + b_2 \cdot y) + c_1}{a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2}\right)$

(3) Μετασχηματισμός: $z(x) = a_2 \cdot x + b_2 \cdot y(x)$

ΦΟΙΤΗΤΙΚΟ ΠΡΟΣΗΜΟ

(4) Παραγώγιση του Μετασχηματισμού: $y'(x) = \frac{1}{b_2} \cdot [z'(x) - a_2]$

(5) Αντικατάσταση στη Σ. Δ. Ε. του Βήματος 2

(6) Αναγωγή στη νέα Σ. Δ. Ε.: $\frac{1}{b_2 \cdot f\left(\frac{k \cdot z + c_1}{z + c_2}\right) + a_2} dz = dx$

(Σ. Δ. Ε. Χωριζομένων Μεταβλητών)

(7) Γενική Λύση $z(x)$ της τελευταίας Σ. Δ. Ε.:

$$\int \frac{1}{b_2 \cdot f\left(\frac{k \cdot z + c_1}{z + c_2}\right) + a_2} dz = \int dx + c$$

(8) Επαναφορά στο Μετασχηματισμό του Βήματος 3

(9) Γενική Λύση $y(x)$ της αρχικής Σ. Δ. Ε..

<u>Περίπτωση 2</u>:

(1) Αν $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, τότε λύνουμε το σύστημα

$\begin{cases} a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 = 0 \\ a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 = 0 \end{cases}$, και έστω (x_0, y_0) η λύση του.

(2) 1ος Μετασχηματισμός $\begin{cases} x = x_0 + X \\ y = y_0 + Y \end{cases}$ ή $\begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases}$

(3) Διαφόριση του 1ου Μετασχηματισμού: $\begin{cases} dx = dX \\ dy = dY \end{cases}$

(4) Αντικατάσταση στην αρχική Σ. Δ. Ε.

(5) Αναγωγή στη νέα Σ. Δ. Ε. : $Y'(X) = f\left(\frac{a_1 \cdot X + b_1 \cdot Y}{a_2 \cdot X + b_2 \cdot Y}\right)$

(Ομογενής Σ. Δ. Ε.)

(6) 2ος Μετασχηματισμός: $\frac{Y(X)}{X} = u(X)$ ή $Y(X) = X \cdot u(X)$

(7) Παραγώγιση του 2ου Μετασχηματισμού: $Y'(X) = u(X) + X \cdot u'(X)$

ΦΟΙΤΗΤΙΚΟ ΠΡΟΣΗΜΟ

(8) Αντικατάσταση στη Σ. Δ. Ε. του Βήματος 5

(9) Αναγωγή στη νέα Σ. Δ. Ε.: $\dfrac{1}{f\left(\dfrac{a_1 + b_1 \cdot u}{a_2 + b_2 \cdot u}\right) - u}\, du = \dfrac{1}{X}\, dX$

(Σ. Δ. Ε. Χωριζομένων Μεταβλητών)

(10) Γενική Λύση $u(X)$ της τελευταίας Σ. Δ. Ε.:

$$\int \frac{1}{f\left(\dfrac{a_1 + b_1 \cdot u}{a_2 + b_2 \cdot u}\right) - u}\, du = \int \frac{1}{X}\, dX + c$$

(11) Επαναφορά στο Μετασχηματισμό του Βήματος 6

(12) Γενική Λύση $Y(X)$ της Σ. Δ. Ε. του Βήματος 5

(13) Επαναφορά στο Μετασχηματισμό του Βήματος 2

(14) Γενική Λύση $y(x)$ της αρχικής Σ. Δ. Ε..

3. Ακριβείς ή Πλήρεις Σ.Δ.Ε.

(1) Μορφή: $P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0$

(2) Κριτήριο ότι η αρχική Σ. Δ. Ε. είναι Ακριβής: $\dfrac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \dfrac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$

(3) Γενική Λύση της αρχικής Σ. Δ. Ε. : $\displaystyle\int_{x_0}^{x} P(t, y)\, dt + \int Q(x_0, y)\, dy = c$ ή

$$\int_{y_0}^{y} Q(x, t)\, dt + \int P(x, y_0)\, dy = c.$$

4. Σ.Δ.Ε. Αναγόμενες σε Ακριβείς

(1) Μορφή: $P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0$

ΦΟΙΤΗΤΙΚΟ ΠΡΟΣΗΜΟ

(2) Κριτήριο ότι η αρχική Σ. Δ. Ε. δεν είναι Ακριβής: $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$

(3) Εύρεση μίας συνάρτησης $\mu(x,y)$ (Πολλαπλασιαστής Euler)

(4) Αναγωγή στη νέα Σ. Δ. Ε. : $\mu(x,y) \cdot P(x,y)\, dx + \mu(x,y) \cdot Q(x,y)\, dy = 0$

(Ακριβής Σ. Δ. Ε.)

(5) Γενική Λύση της τελευταίας Σ. Δ. Ε. : $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \hat{P}(t,y)\, dt + \int \hat{Q}(x_0,y)\, dy = c$ ή

$$\int_{y_0}^{y} \hat{Q}(x,t)\, dt + \int \hat{P}(x,y_0)\, dy = c,$$

με $\begin{cases} \hat{P}(x,y) = \mu(x,y) \cdot P(x,y) \\ Q(x,y) = \mu(x,y) \cdot Q(x,y) \end{cases}$.

5. Γραμμικές Σ.Δ.Ε.

(1) Μορφή: $y'(x) + f(x) \cdot y(x) = g(x)$

(2) Γενική Λύση: $y(x) = e^{-\int f(x)\, dx} \cdot \left[\int g(x) \cdot e^{\int f(x)\, dx}\, dx + c\right]$.

6. Μη Γραμμικές Σ.Δ.Ε.

I. Σ.Δ.Ε. της Μορφής Bernoulli

(1) Μορφή: $y'(x) + f(x) \cdot y(x) = g(x) \cdot y^n(x), n \neq 0,1$

(2) Διαίρεση της αρχικής Σ. Δ. Ε. με το μη γραμμικό όρο $y^n(x)$

(3) Αναγωγή στη νέα Σ. Δ. Ε. : $y^{-n}(x) \cdot y'(x) + f(x) \cdot y^{1-n}(x) = g(x)$

(4) Μετασχηματισμός: $y^{1-n}(x) = z(x)$

(5) Παραγώγιση του Μετασχηματισμού: $y^{-n}(x) \cdot y'(x) = \dfrac{1}{1-n} \cdot z'(x)$

ΦΟΙΤΗΤΙΚΟ ΠΡΟΣΗΜΟ

(6) Αντικατάσταση στη Σ. Δ. Ε. του Βήματος 3

(7) Αναγωγή στη νέα Σ. Δ. Ε.:

$$z'(x) + (1-n) \cdot f(x) \cdot z(x) = (1-n) \cdot g(x)$$

(Γραμμική Σ. Δ. Ε.)

(8) Γενική Λύση της τελευταίας Σ. Δ. Ε.:

$$z(x) = e^{-\int \hat{f}(x)\,dx} \cdot \left[\int \hat{g}(x) \cdot e^{\int \hat{f}(x)\,dx}\,dx + c\right],$$

με $\begin{cases} \hat{f}(x) = (1-n) \cdot f(x) \\ \hat{g}(x) = (1-n) \cdot g(x) \end{cases}$

(9) Επαναφορά στο Μετασχηματισμό του Βήματος 4

(10) Γενική Λύση $y(x)$ της αρχικής Σ. Δ. Ε..

II. Σ.Δ.Ε. της Μορφής Riccatti

(1) Μορφή: $y'(x) = \sigma_0(x) + \sigma_1(x) \cdot y(x) + \sigma_2(x) \cdot y^2(x)$

(2) Εύρεση μίας ειδικής λύσης $y_1(x)$ της αρχικής Σ. Δ. Ε.

(3) 1ος Μετασχηματισμός: $y(x) = y_1(x) + z(x)$

(4) Παραγώγιση του 1ου Μετασχηματισμού: $y'(x) = y_1{}'(x) + z'(x)$

(5) Αντικατάσταση στην αρχική Σ. Δ. Ε.

(6) Αναγωγή στη νέα Σ. Δ. Ε.:

$$z'(x) - [\sigma_1(x) + 2 \cdot \sigma_2(x) \cdot y_1(x)] \cdot z(x) = \sigma_2(x) \cdot z^2(x)$$

(Σ. Δ. Ε. της μορφής Bernoulli)

(7) Διαίρεση της τελευταίας Σ. Δ. Ε. με το μη γραμμικό όρο $z^2(x)$

(8) Αναγωγή στη νέα Σ. Δ. Ε.:

$$z^{-2}(x) \cdot y'(x) - [\sigma_1(x) + 2 \cdot \sigma_2(x) \cdot y_1(x)] \cdot z^{-1}(x) = \sigma_2(x)$$

(9) 2ος Μετασχηματισμός: $z^{-1}(x) = u(x)$

(10) Παραγώγιση του 2ου Μετασχηματισμού: $z^{-2}(x) \cdot z'(x) = -u'(x)$

ΦΟΙΤΗΤΙΚΟ ΠΡΟΣΗΜΟ

(11) Αντικατάσταση στη Σ. Δ. Ε. του Βήματος 8

(12) Αναγωγή στη νέα Σ. Δ. Ε.:

$$u'(x) + [\sigma_1(x) + 2 \cdot \sigma_2(x) \cdot y_1(x)] \cdot u(x) = -\sigma_2(x)$$

(Γραμμική Σ. Δ. Ε.)

(13) Γενική Λύση της τελευταίας Σ. Δ. Ε.:

$$u(x) = e^{-\int \hat{f}(x)\,dx} \cdot \left[\int \hat{g}(x) \cdot e^{\int \hat{f}(x)\,dx}\,dx + c\right],$$

με $\begin{cases} \hat{f}(x) = \sigma_1(x) + 2 \cdot \sigma_2(x) \cdot y_1(x) \\ \hat{g}(x) = -\sigma_2(x) \end{cases}$

(14) Επαναφορά στο Μετασχηματισμό του Βήματος 9

(15) Γενική Λύση $z(x)$ της Σ. Δ. Ε. του Βήματος 6

(16) Επαναφορά στο Μετασχηματισμό του Βήματος 3

(17) Γενική Λύση $y(x)$ της αρχικής Σ. Δ. Ε..

ΦΟΙΤΗΤΙΚΟ ΠΡΟΣΗΜΟ