Μετασχηματισμός Laplace

1. Ορισμός

$$L\{f(x)\} = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-s\cdot x} \cdot f(x)\, dx$$

2. Ιδιότητες

Αν $L\{f(x)\} = F(s)$ και $L\{g(x)\} = G(s)$, τότε:

- $L\{\kappa \cdot f(x) + \lambda \cdot g(x)\} = \kappa \cdot F(s) + \lambda \cdot G(s)$
- $L\{f(a \cdot x)\} = \frac{1}{|a|} \cdot F\left(\frac{s}{a}\right), s > 0\ (a \neq 0)$
- $L\{e^{a\cdot x} \cdot f(x)\} = F(s-a), s > a$
- $L\{x \cdot f(x)\} = -\frac{dF}{ds}$

  $L\{x^2 \cdot f(x)\} = (-1)^2 \cdot \frac{d^2F}{ds^2}$

  $\vdots$

  $L\{x^n \cdot f(x)\} = (-1)^n \cdot \frac{d^nF}{ds^n}$
- Αν η $f(x)$ είναι μία διαφορίσιμη συνάρτηση, τότε:

  $L\{f'(x)\} = s \cdot F(s) - f(0^+)$

  $L\{f''(x)\} = s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0^+) - f'(0^+)$

  $\vdots$

  $L\{f^{(n)}(x)\} = s^n \cdot F(s) - s^{n-1} \cdot f(0^+) - s^{n-2} \cdot f'(0^+) - \cdots - -f^{(n-1)}(0^+),$

  όπου $f^{(k)}(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f^{(k)}(x), k = 0,1,2,\ldots,n-1$

ΦΟΙΤΗΤΙΚΟ ΠΡΟΣΗΜΟ

- $L\left\{\int_0^u f(x)\,dx\right\} = \frac{F(s)}{s}, s > 0$

- Αν υπάρχει το $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$, τότε $L\left\{\frac{f(x)}{x}\right\} = \int_0^{+\infty} F(u)\,du\,, s > 0$

- $L\{f(x) * g(x)\} = F(s)\cdot G(s)$, όπου:

$$f(x) * g(x) = \int_0^x f(t)\cdot g(x-t)\,dt$$

η συνέλιξη των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$

3. Βασικές Συναρτήσεις

- $L\{1\} = \frac{1}{s}, s > 0$

- $L\{e^{a\cdot x}\} = \frac{1}{s-a}, s > a$

- $L\{x^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, s > 0\ (n \in \mathrm{N})$

- $L\{\cos(b\cdot x)\} = \frac{s}{s^2+b^2}, s > 0$

- $L\{\sin(b\cdot x)\} = \frac{b}{s^2+b^2}, s > 0$

- $L\{H_a(x)\} = \frac{1}{s}\cdot e^{-a\cdot s}, s > 0$, όπου:

$$H_a(x) = \begin{cases} 0, 0 < x < \alpha \\ 1, x > a \end{cases},$$

η συνάρτηση Heaviside ή συνάρτηση μοναδιαίου βήματος

ΦΟΙΤΗΤΙΚΟ ΠΡΟΣΗΜΟ

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace

1. Ορισμός

$$L^{-1}\{F(s)\} = f(x) = \int_{0}^{+\infty} e^{s\cdot x} \cdot F(s)\, ds$$

2. Ιδιότητες

Αν $L^{-1}\{F(s)\} = f(x)$ και $L^{-1}\{G(s)\} = g(x)$, τότε:

- $L^{-1}\{\kappa \cdot F(s) + \lambda \cdot G(s)\} = \kappa \cdot f(x) + \lambda \cdot g(x)$
- $L^{-1}\left\{F\left(\frac{s}{a}\right)\right\} = |a| \cdot f(a \cdot x)\ (a \neq 0)$
- $L^{-1}\{F(s-a)\} = e^{a\cdot x} \cdot f(x)$
- $L^{-1}\left\{\frac{d^n F}{ds^n}\right\} = (-1)^n \cdot x^n \cdot f(x)$
- $L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_{0}^{u} f(x)\, dx$
- $L^{-1}\{F(s) \cdot G(s)\} = f(x) * g(x)$

3. Βασικές Συναρτήσεις

- $L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1$
- $L^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} = e^{a\cdot x}$
- $L^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\} = x^n\ (n \in \mathrm{N})$
- $L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+b^2}\right\} = \cos(b \cdot x)$

ΦΟΙΤΗΤΙΚΟ ΠΡΟΣΗΜΟ

- $L^{-1}\left\{\frac{b}{s^2+b^2}\right\} = \sin(b \cdot x)$
- $L^{-1}\left\{\frac{1}{s} \cdot e^{-a \cdot s}\right\} = H_a(x)$

ΦΟΙΤΗΤΙΚΟ ΠΡΟΣΗΜΟ