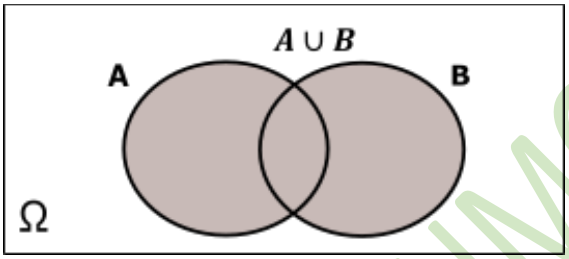
ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

- **Πράξεις Ενδεχομένων**

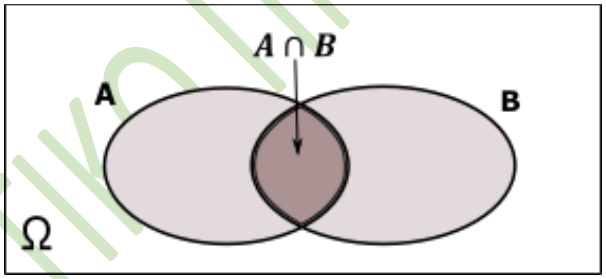
  i. Ένωση Ενδεχομένων $(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})$

  Αν έχουμε το ενδεχόμενο «συμβαίνει **τουλάχιστον** ένα εκ των ενδεχομένων Α και Β» τότε γράφουμε «$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$» ή «**Α ή Β»**.



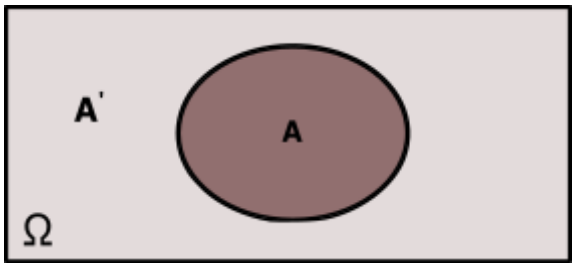
  ii. Τομή Ενδεχομένων $(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})$

  Αν έχουμε το ενδεχόμενο «συμβαίνει το Α **και** το Β» τότε γράφουμε «$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$» ή «$\boldsymbol{AB}$».



  iii. Συμπληρωματικό Ενδεχόμενο $(\boldsymbol{A}')$

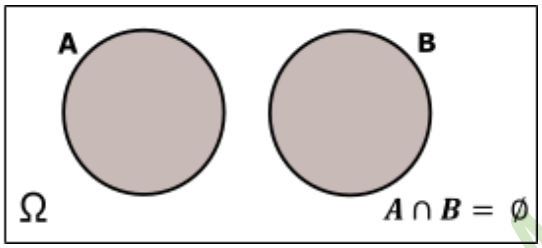
  Αν έχουμε το ενδεχόμενο «**δε συμβαίνει** το Α» τότε γράφουμε «$\boldsymbol{A}'$» ή «$\boldsymbol{A}^{c}$» ή «$\bar{\boldsymbol{A}}$».



ΦΟΙΤΗΤΙΚΟ ΠΡΟΣΗΜΟ

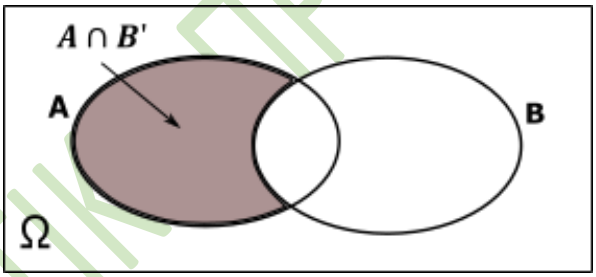
iv. Ασυμβίβαστα Ενδεχόμενα

Αν τα ενδεχόμενα Α και Β δε μπορούν να συμβούν και τα δυο στο ίδιο πείραμα, δηλαδή δεν έχουν κοινά σημεία και άρα ισχύει ότι $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B} = \emptyset$**,** ονομάζονται **Ασυμβίβαστα** ή **Ξένα** ή **Αμοιβαίως Αποκλειόμενα**.



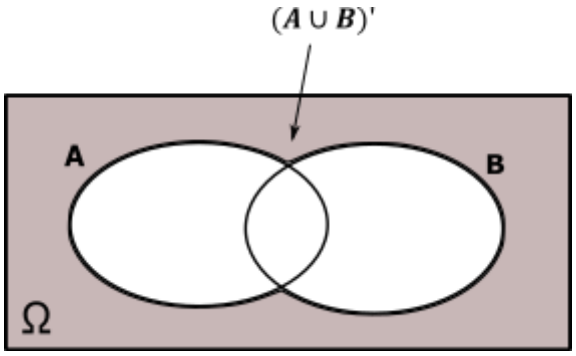
v. Διαφορά Ενδεχομένων

Αν πραγματοποιείται το ενδεχόμενο **Α και όχι το Β**, τότε γράφουμε «$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$» ή «$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}'$».



vi. Μη Πραγματοποίηση Κάποιου Ενδεχομένου

Αν δεν πραγματοποιείται **κανένα ενδεχόμενο** εκ των Α και Β, τότε γράφουμε «$(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})'$» ή «$\boldsymbol{A}' \cap \boldsymbol{B}'$».



ΦΟΙΤΗΤΙΚΟ ΠΡΟΣΗΜΟ

Ιδιότητες Πράξεων Μεταξύ των Ενδεχομένων

i. Αντιμεταθετική Ιδιότητα

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cap B = B \cap A$

ii. Προσεταιριστική Ιδιότητα

- $(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma)$
- $(A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma)$

iii. Επιμεριστική Ιδιότητα

- $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$
- $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$

iv. Νόμοι De Morgan

- $(A \cup B)' = A' \cap B'$
- $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Κλασικός Ορισμός Πιθανότητας

Αν $N(\Omega)$ είναι το πλήθος όλων των δυνατών αποτελεσμάτων που μπορούν να εμφανιστούν στο πείραμα τύχης και $N(A)$ το πλήθος των ευνοϊκών αποτελεσμάτων ώστε να πραγματοποιηθεί το Α, τότε ορίζουμε την πιθανότητα να συμβεί το γεγονός Α ως $P(A)$ και δίνεται από τη σχέση:

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}}$$

Ισχύουν:

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\Omega) = 1$
- $P(\emptyset) = 0$

Αξιωματικός Ορισμός Πιθανότητας

Η πιθανότητα είναι μια συνολοσυνάρτηση που ικανοποιεί τα αξιώματα:

i. $\boldsymbol{P(A) \geq 0}$**,** για κάθε $A \subseteq \Omega$

ii. $\boldsymbol{P(\Omega) = 1}$

iii. Αν $\boldsymbol{A \cap B = \emptyset}$, τότε: $P(\boldsymbol{A \cup B}) = \boldsymbol{P(A) + P(B)}$

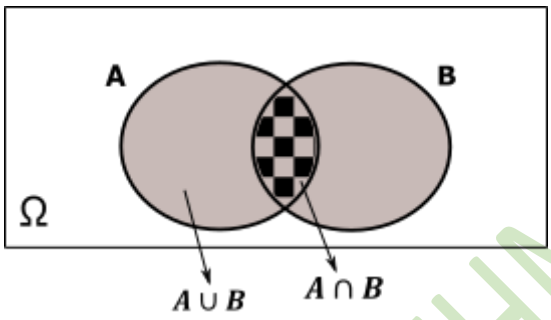
Ομοίως αν A, B, Γ είναι τρία ενδεχόμενα ξένα ανά δυο μεταξύ τους ισχύει:

$$P(\boldsymbol{A \cup B \cup \Gamma}) = \boldsymbol{P(A) + P(B) + P(\Gamma)}$$

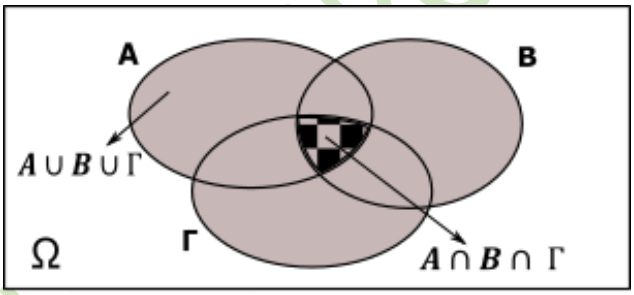
ΦΟΙΤΗΤΙΚΟ ΠΡΟΣΗΜΟ

Από τα αξιώματα προκύπτουν:

- $P(\emptyset) = 0$
- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(A') = 1 - P(A)$
- Αν $A \subseteq B$, τότε $P(A) \leq P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$



- $P(A \cup B \cup \Gamma) = P(A) + P(B) + P(\Gamma) - P(A \cap B) - P(B \cap \Gamma) - P(A \cap \Gamma) + P(A \cap B \cap \Gamma)$



Δεσμευμένη ή Υπό Συνθήκη Πιθανότητα

- Η πιθανότητα να συμβεί το ενδεχόμενο Α **εφόσον γνωρίζουμε ότι συνέβη το Β**, γράφεται ως $P(A|B)$ και ισούται με:

$$\boldsymbol{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

- Η πιθανότητα να συμβεί το ενδεχόμενο Β **εφόσον γνωρίζουμε ότι συνέβη το Α**, γράφεται ως $P(B|A)$ και ισούται με:

$$\boldsymbol{P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

Πολλαπλασιαστικός Νόμος

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B)}$$

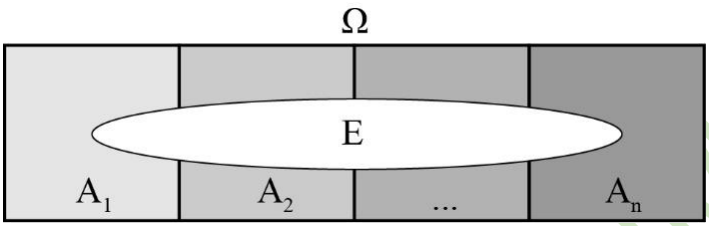
ΦΟΙΤΗΤΟΣΗΜΟ

Ανεξάρτητα Ενδεχόμενα

Αν A, B δυο Ανεξάρτητα ενδεχόμενα, τότε ισχύουν τα εξής:

- $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)}$
- $\boldsymbol{P(A|B) = P(A)}$
- $\boldsymbol{P(B|A) = P(B)}$

Διαμέριση Δειγματικού Χώρου



Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας (Θ.Ο.Π.)

$$\boldsymbol{P(E) = P(E|A_1)P(A_1) + P(E|A_2)P(A_2) + \ \dots + P(E|A_n)\ P(A_n)}$$

Τύπος του Bayes

$$\boldsymbol{P(A_i|E) = \frac{P(E|A_i)\ P(A_i)}{P(E)}}$$

ΦΟΙΤΗΤΙΚΟ ΠΡΟΣΗΜΟ