Επιφάνειες

Γενικά μία εξίσωση της μορφής:

$$\boxed{F(x,y,z)=0}$$

παριστάνει μία **επιφάνεια** στον ευκλείδειο χώρο R^3.

Μία επιφάνεια μπορεί να δοθεί σε **παραμετρική μορφή** με τρεις εξισώσεις:

$$\boxed{\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}},$$

όπου u, v οι παράμετροι.

Παρακάτω, κάνουμε μία εκτενή καταγραφή των πιο βασικών επιφανειών που συναντάμε μαζί με τα πιο βασικά στοιχεία τους:

1. **Σφαίρα με Κέντρο το $K(x_0, y_0, z_0)$ και Ακτίνας r**

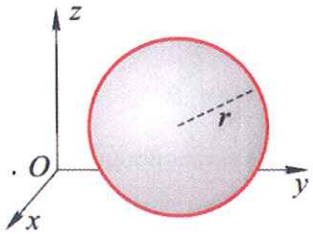
   Κάθε τομή της σφαίρας με ένα επίπεδο που απέχει από το κέντρο λιγότερο από r είναι κύκλος.

   A. <u>Εξίσωση σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες</u>:

   $$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2}.$$

   B. <u>Παραμετρική Μορφή</u>:

   $$\boxed{\begin{cases} x - x_0 = r\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi \\ y - y_0 = r\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi \\ z - z_0 = r\cdot\cos\theta \end{cases}},$$



   ή ισοδύναμα

   $$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + r\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi \\ y = y_0 + r\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi \\ z = z_0 + r\cdot\cos\theta \end{cases}}.$$

   Οπότε:

   $$\boxed{\vec{X}(\theta,\varphi) = (x_0 + r\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi\,, y_0 + r\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi\,, z_0 + r\cdot\cos\theta)}.$$

Γ. Εμβαδό Επιφάνειας:

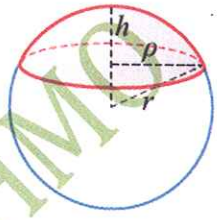
$$\boxed{E = 4 \cdot \pi \cdot r^2}.$$

Δ. Όγκος:

$$\boxed{V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3}.$$

- Για το **Σφαιρικό Τμήμα** του σχήματος, όπου r η ακτίνα και h το ύψος του, ισχύουν τα εξής:

  Ακτίνα Βάσης:



$$\boxed{\rho = \sqrt{h \cdot (2 \cdot r - h)}}.$$

  Εμβαδό Επιφάνειας:

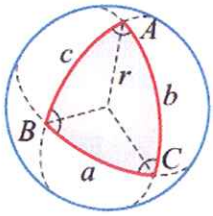
$$\boxed{E = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h}.$$

  Όγκος:

$$\boxed{V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h^2 \cdot (3 \cdot r - h)}.$$

- Για το **Σφαιρικό Τρίγωνο** του σχήματος, όπου A, B, C οι γωνίες του και r η ακτίνα της σφαίρας, ισχύει το εξής:

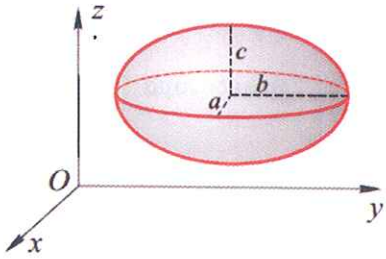
  Εμβαδό Επιφάνειας:



$$\boxed{E = (A + B + C - \pi) \cdot r^2}.$$

2. Ελλειψοειδές με Κέντρο $K(x_0, y_0, z_0)$ και Ημιάξονες a, b και c

Κάθε πραγματική τομή του ελλειψοειδούς με ένα επίπεδο είναι μία κλειστή δευτεροβάθμια καμπύλη, άρα είναι έλλειψη (με ειδική περίπτωση τον κύκλο, αν $a = b = c$).



Α. Εξίσωση σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες:

$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1}.$$

Β. Παραμετρική Μορφή:

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{a} = r\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi \\ \dfrac{y-y_0}{b} = r\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi \\ \dfrac{z-z_0}{c} = r\cdot\cos\theta \end{cases}},$$

ή ισοδύναμα

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + a\cdot r\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi \\ y = y_0 + b\cdot r\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi \\ z = z_0 + c\cdot r\cdot\cos\theta \end{cases}}.$$

Οπότε:

$$\boxed{\vec{X}(\theta,\varphi) = (x_0 + a\cdot r\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi\,, y_0 + b\cdot r\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi\,, z_0 + c\cdot r\cdot\cos\theta)}.$$

Γ. Εκκεντρότητα:

$$\boxed{\varepsilon = \begin{cases} \sqrt{1-\dfrac{c^2}{a^2}}, \text{αν } a = b > c \\ \sqrt{1-\dfrac{c^2}{a^2}}, \text{αν } a = b < c \end{cases}}.$$

Δ. Εμβαδό Επιφάνειας:

$$\boxed{E = \begin{cases} 2\cdot\pi\cdot a^2 + \dfrac{\pi\cdot c^2}{\varepsilon}\cdot\ln\left(\dfrac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right), \text{αν } a = b > c \\ 2\cdot\pi\cdot a^2 + \dfrac{2\cdot\pi\cdot a\cdot c}{\varepsilon}\cdot\arcsin\varepsilon, \text{αν } a = b < c \end{cases}},$$

όπου ε η εκκεντρότητα του ελλειψοειδούς.

Ε. Όγκος:

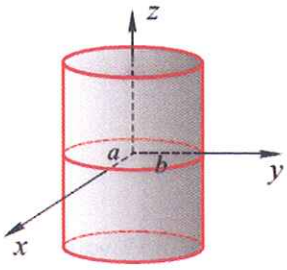
$$\boxed{V = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot a\cdot b\cdot c}.$$

3. Ελλειπτικός Κύλινδρος με Κέντρο O(0, 0, 0) Παράλληλος προς τον Άξονα *Oz*

Κάθε τομή του ελλειπτικού κυλίνδρου με ένα επίπεδο μη παράλληλο προς τον άξονα z είναι έλλειψη (με ειδική περίπτωση τον κύκλο, αν $a = b$).

A. Εξίσωση σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}.$$



B. Παραμετρική Μορφή:

$$\boxed{\begin{cases}\dfrac{x}{a}=r\cdot\cos\theta\\ \dfrac{y}{b}=r\cdot\sin\theta\\ z_1\le z\le z_2\end{cases}},$$

ή ισοδύναμα

$$\boxed{\begin{cases}x=a\cdot r\cdot\cos\theta\\ y=b\cdot r\cdot\sin\theta\\ z_1\le z\le z_2\end{cases}}.$$

Οπότε:

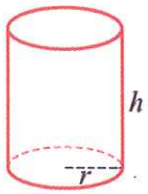
$$\boxed{\vec{X}(\theta,\varphi)=(a\cdot r\cdot\cos\theta\,,b\cdot r\cdot\sin\theta\,,z)},$$

με $z_1\le z\le z_2$.

- Για τον **Ορθό Κυκλικό Κύλινδρο** του σχήματος, όπου r η ακτίνα της βάσης και h το ύψος του, ισχύουν τα εξής:

Εμβαδό Επιφάνειας:

$$\boxed{E=2\cdot\pi\cdot r\cdot h}.$$



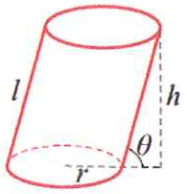
Όγκος:

$$\boxed{V=\pi\cdot r^2\cdot h}.$$

- Για τον **Πλάγιο Κυκλικό Κύλινδρο** του σχήματος, όπου r η ακτίνα της βάσης, h το ύψος και l η γενέτειρά του, ισχύουν τα εξής:

Ύψος:

$$\boxed{h=l\cdot\sin\theta}.$$



Εμβαδό Επιφάνειας:

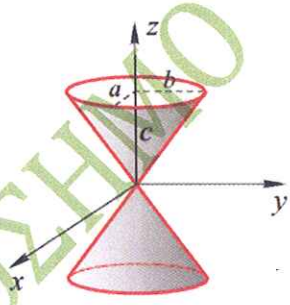
$$\boxed{E=2\cdot\pi\cdot r\cdot l=\frac{2\cdot\pi\cdot r\cdot h}{\sin\theta}}.$$

Όγκος:

$$\boxed{V = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot l \cdot \sin\theta}.$$

4. Ελλειπτικός Κώνος με Σημείο Επαφής το $O(0,0,0)$ Παράλληλος προς τον Άξονα Oz

Μια τομή του ελλειπτικού κώνου με ένα επίπεδο είναι έλλειψη (αν είναι κλειστή καμπύλη), υπερβολή (αν έχει δύο τμήματα) ή παραβολή (αν είναι ανοικτή με ένα τμήμα).



A. Εξίσωση σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0}.$$

B. Παραμετρική Μορφή:

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{x}{a} = u \cdot \cos v \\ \dfrac{y}{b} = u \cdot \sin v \\ \dfrac{z}{c} = u \end{cases}},$$

ή ισοδύναμα

$$\boxed{\begin{cases} x = a \cdot u \cdot \cos v \\ y = b \cdot u \cdot \sin v \\ z = c \cdot u \end{cases}}.$$

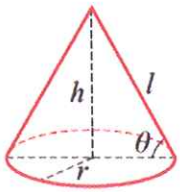
Οπότε:

$$\boxed{\vec{X}(r,v) = (a \cdot u \cdot \cos v\,, b \cdot u \cdot \sin v\,, c \cdot u)}.$$

- Για τον **Ορθό Κυκλικό Κώνο** του σχήματος, όπου r η ακτίνα της βάσης και h το ύψος του, ισχύουν τα εξής:

Ύψος:

$$\boxed{h = l \cdot \sin\theta}.$$



Εμβαδό Επιφάνειας:

$$\boxed{E = \pi \cdot r \cdot l = \pi \cdot r \cdot \sqrt{r^2 + h^2}}.$$

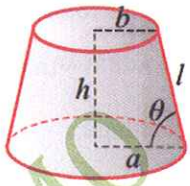
Όγκος:

$$\boxed{V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h}.$$

- Για τον **Ορθό Κόλουρο Κώνο** του σχήματος, όπου a, b οι ακτίνες των βάσεων και h το ύψος του, ισχύουν τα εξής:

  Ύψος:

$$\boxed{h = l \cdot \sin\theta = \sqrt{l^2 - (a-b)^2}}.$$



  Εμβαδό Επιφάνειας:

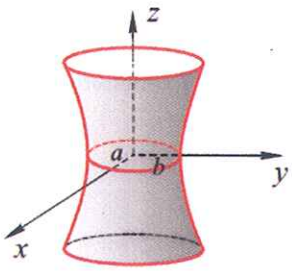
$$\boxed{E = \pi \cdot (a+b) \cdot l = \pi \cdot (a+b) \cdot \sqrt{h^2 + (a-b)^2}}.$$

  Όγκος:

$$\boxed{V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot h \cdot (a^2 + a \cdot b + b^2)}.$$

5. Μονόχωνο Υπερβολοειδές

Οι οριζόντιες τομές του μονόχωνου υπερβολοειδούς είναι ελλείψεις. Οι κατακόρυφες τομές του (με ένα επίπεδο της μορφής $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$) είναι υπερβολές.

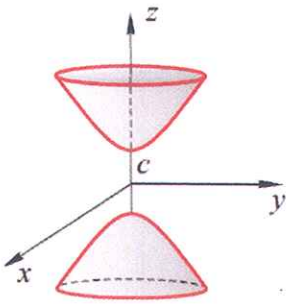


Εξίσωση σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1}.$$

6. Δίχωνο Υπερβολοειδές

Οι οριζόντιες τομές του δίχωνου υπερβολοειδούς για $|z| > c$ είναι ελλείψεις. Οι κατακόρυφες τομές του με ένα επίπεδο της μορφής $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$ είναι υπερβολές.

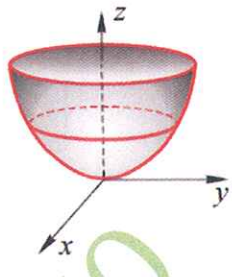


Εξίσωση σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες:

$$\boxed{\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}.$$

7. Ελλειπτικό Παραβολοειδές

Οι τομές του ελλειπτικού παραβολοειδούς με ένα επίπεδο (οριζόντιες με $z > 0$ ή πλάγιες) είναι ελλείψεις. Οι κατακόρυφες τομές του (με ένα επίπεδο της μορφής $A \cdot x + B \cdot y + C = 0$) είναι παραβολές.



Εξίσωση σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες:

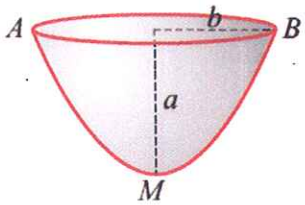
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z}{c} = 0}.$$

- Για το **Παραβολοειδές από περιστροφή** του σχήματος, ισχύουν τα εξής:

Εμβαδό Επιφάνειας:

$$\boxed{E = \frac{\pi \cdot b^2}{6 \cdot a^2} \cdot \left[\left(\frac{4 \cdot a^2}{b^2} + 1\right)^{3/2} - 1\right]}.$$

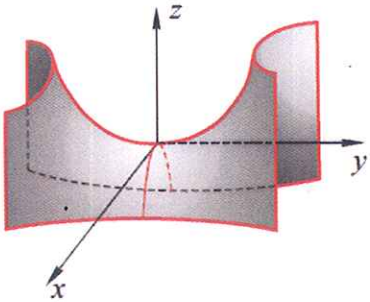
Όγκος:



$$\boxed{V = \frac{1}{4} \cdot \pi^2 \cdot (a + b) \cdot (b - a)^2}.$$

8. Υπερβολικό Παραβολοειδές

Οι τομές του υπερβολικού παραβολοειδούς με ένα επίπεδο είναι υπερβολές, αν έχουν δύο τμήματα (π.χ. οριζόντιες τομές με $z =$ σταθ.) ή παραβολές, αν έχουν ένα τμήμα (π.χ. κατακόρυφες τομές με $x =$ σταθ. ή $y =$ σταθ.).



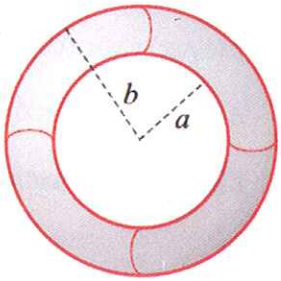
Εξίσωση σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z}{c} = 0}.$$

9. Τόρος

A. Εμβαδό Επιφάνειας:

$$\boxed{E = \pi^2 \cdot (b^2 - a^2)}.$$



B. Όγκος:

$$\boxed{V = \frac{1}{4} \cdot \pi^2 \cdot (a+b) \cdot (b-a)^2}.$$

Σχόλιο: Αν μία επιφάνεια έχει εξίσωση της μορφής:

$$\boxed{z = f(x,y)}$$

τότε έχει την ακόλουθη **παραμετρική μορφή (κατά Monge)**:

$$\boxed{\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u,v) \end{cases}},$$

δηλαδή:

$$\boxed{\vec{X}(u,v) = \big(u, v, f(u,v)\big)},$$

όπου u, v οι παράμετροι.