

## Επίπεδες Καμπύλες

Γενικά μία εξίσωση της μορφής:

$$f(x, y) = 0$$

παριστάνει μία **καμπύλη** στο επίπεδο  $xy$  ( $\mathbb{R}^2$ ).

Μία καμπύλη μπορεί να δοθεί σε **παραμετρική μορφή** με δύο εξισώσεις:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases},$$

όπου  $t$  κάποια παράμετρος.

Παρακάτω, κάνουμε μία εκτενή καταγραφή των πιο βασικών επίπεδων καμπυλών που συναντάμε μαζί με τα πιο βασικά στοιχεία τους:

### 1. Ευθεία στο Επίπεδο

A. Γενική Εξίσωση Ευθείας σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες:

$$A \cdot x + B \cdot y + \Gamma = 0,$$

με  $A \neq 0$  ή  $B \neq 0$  ( $|A| + |B| > 0$ ).

B. Εξίσωση σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες:

$$y - y_0 = \lambda \cdot (x - x_0).$$

Γ. Παραμετρική Μορφή:

$$\begin{cases} x = t \\ y - y_0 = \lambda \cdot (t - x_0) \end{cases}$$

ή ισοδύναμα:

$$\begin{cases} x = t \\ y = y_0 + \lambda \cdot (t - x_0) \end{cases}$$

άρα:

$$\vec{r}(t) = (t, y_0 + \lambda \cdot (t - x_0)).$$

## 2. Κύκλος Κέντρου $O(x_0, y_0)$ και Ακτίνας $r_0$

A. Γενική Εξίσωση Κύκλου σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες:

$$x^2 + y^2 + A \cdot x + B \cdot y + \Gamma = 0,$$

με  $A^2 + B^2 - 4 \cdot \Gamma > 0$ .

B. Εξίσωση σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r_0^2.$$

Γ. Παραμετρική Μορφή:

$$\begin{cases} x - x_0 = r_0 \cdot \cos t \\ y - y_0 = r_0 \cdot \sin t \end{cases}$$

ή ισοδύναμα:

$$\begin{cases} x = x_0 + r_0 \cdot \cos t \\ y = y_0 + r_0 \cdot \sin t \end{cases}$$

άρα:

$$\vec{r}(t) = (x_0 + r_0 \cdot \cos t, y_0 + r_0 \cdot \sin t).$$

Δ. Εφαπτομένη Κύκλου:

$$x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = r_0^2,$$

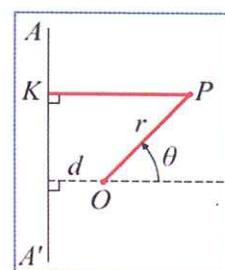
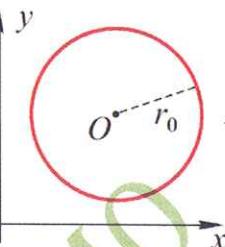
όπου  $(x_1, y_1)$  τυχαίο σημείο του κύκλου.

## 3. Κωνικές Τομές

Έστω  $\varepsilon = \frac{PO}{PK}$  ο λόγος των αποστάσεων ενός σημείου P από

ένα σημείο O και από μία ευθεία AA'. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων P, για τα οποία  $\varepsilon = \text{σταθ.}$ , είναι μία κωνική τομή, με εξίσωση σε πολικές συντεταγμένες:

$$r = \frac{\varepsilon \cdot d}{1 - \varepsilon \cdot \cos \theta},$$



όπου η σταθερά  $\varepsilon$  καλείται εκκεντρότητα.

- Αν  $\varepsilon < 1$ , η κωνική τομή είναι Έλλειψη
- Αν  $\varepsilon > 1$ , η κωνική τομή είναι Υπερβολή
- Αν  $\varepsilon = 1$ , η κωνική τομή είναι Παραβολή.

I. **Έλλειψη Κέντρου  $K(x_0, y_0)$  με Ήμιάξονες  $a$  και  $b$ , παράλληλους προς τους άξονες συντεταγμένων  $Ox$  και  $Oy$**

A. Εξίσωση σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

B. Παραμετρική Μορφή:

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{a} = \cos t \\ \frac{y - y_0}{b} = \sin t \end{cases}$$

ή ισοδύναμα:

$$\begin{cases} x = x_0 + a \cdot \cos t \\ y = y_0 + b \cdot \sin t \end{cases}$$

άρα:

$$\vec{r}(t) = (x_0 + a \cdot \cos t, y_0 + b \cdot \sin t).$$

G. Εφαπτομένη Έλλειψης:

$$\frac{x \cdot x_1}{a^2} + \frac{y \cdot y_1}{b^2} = 1,$$

όπου  $(x_1, y_1)$  τυχαίο σημείου της έλλειψης.

Είναι:

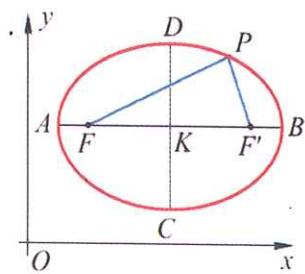
$$AB = 2 \cdot a$$

$$CD = 2 \cdot b$$

$$KF = KF' = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$|PF + PF'| = 2 \cdot a \text{ (P τυχαίο σημείο της έλλειψης)}$$

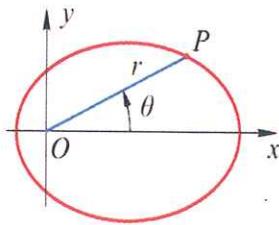
$$\varepsilon = \text{εκκεντρότητα} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}.$$



Αν το  $F$  ταυτίζεται με το  $O$ , έχουμε την εξίσωση της έλλειψης σε πολικές συντεταγμένες:

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cdot \cos \theta},$$

όπου  $p = a \cdot (1 - \varepsilon^2)$ .



**II. Υπερβολή Κέντρου  $K(x_0, y_0)$  με Ήμιάξονες  $a$  και  $b$ , παράλληλους προς τους άξονες συντεταγμένων  $Ox$  και  $Oy$**

A. Εξίσωση σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

B. Εφαπτομένη Έλλειψης:

$$\frac{x \cdot x_1}{a^2} - \frac{y \cdot y_1}{b^2} = 1,$$

όπου  $(x_1, y_1)$  τυχαίο σημείου της υπερβολής.

C. Ασύμπτωτες Υπερβολής:

$$\begin{cases} y = -\frac{b}{a} \cdot x \\ y = \frac{b}{a} \cdot x \end{cases}$$

Είναι:

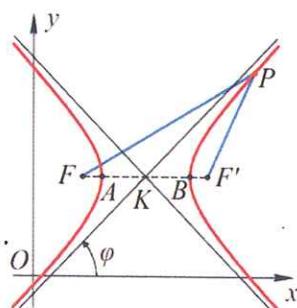
$$AB = 2 \cdot a$$

$$KF = KF' = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$|PF - PF'| = 2 \cdot a \quad (P \text{ τυχαίο σημείο της υπερβολής})$$

$$\varepsilon = \text{εκκεντρότητα} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$$

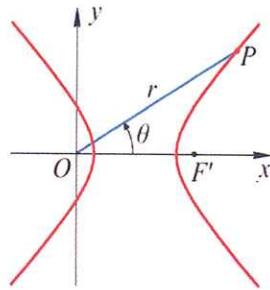
$$\tan \varphi = \frac{b}{a}.$$



Αν το  $F$  ταυτίζεται με το  $O$ , έχουμε την εξίσωση της υπερβολής σε πολικές συντεταγμένες:

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cdot \cos \theta},$$

όπου  $p = a \cdot (\varepsilon^2 - 1)$ .

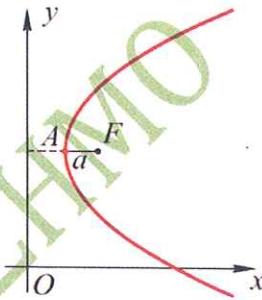


### III. Παραβολή με άξονα παράλληλο προς τον άξονα $Ox$

A. Εξίσωση σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες:

$$(y - y_0)^2 = 4 \cdot a \cdot (x - x_0),$$

με  $A(x_0, y_0)$  και  $AF = a$ .



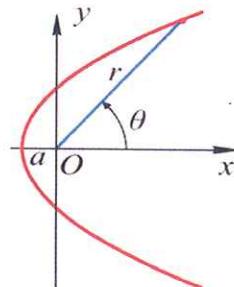
B. Εφαπτομένη Έλλειψης:

$$y \cdot y_1 = a \cdot (x + x_1),$$

όπου  $(x_1, y_1)$  τυχαίο σημείον του κύκλου.

Αν το  $F$  ταυτίζεται με το  $O$ , έχουμε την εξίσωση της παραβολής σε πολικές συντεταγμένες:

$$r = \frac{2 \cdot a}{1 - \cos \theta}.$$

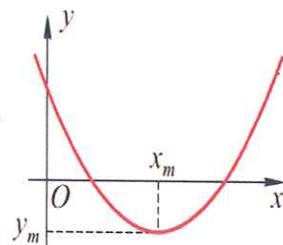


Ακόμα, η εξίσωση:

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c, a > 0,$$

παριστάνει παραβολή με συντεταγμένες ελαχίστου:

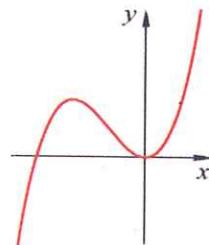
$$\begin{cases} x_m = -\frac{b}{2 \cdot a} \\ y_m = \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a} \end{cases}$$



#### 4. Κυβική Παραβολή

Εξίσωση σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες:

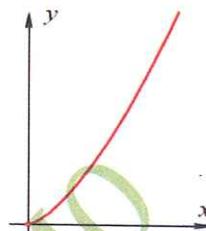
$$y = x^2 \cdot (x - \alpha).$$



#### 5. Ημικυβική Παραβολή

Εξίσωση σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες:

$$y = a \cdot x^{\frac{3}{2}}.$$

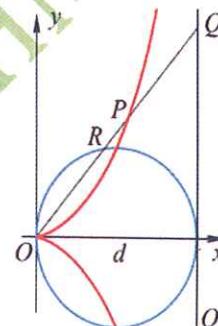


#### 6. Κισσοειδής του Διοκλή

Το  $Q$  κινείται κατά μήκος της  $QQ'$  (εφαπτομένης του κύκλου και της κάθετης στον άξονα  $Ox$ ) και παίρνουμε  $OP = RQ$ , όπου  $P$  είναι το σημείο που διαγράφει τη καμπύλη.

A. Εξίσωση σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες:

$$y^2 = \frac{x^3}{d - x}.$$



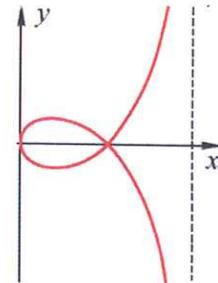
B. Εξίσωση σε Πολικές Συντεταγμένες:

$$r = d \cdot \sin \theta \cdot \tan \theta.$$

#### 7. Στροφοειδής

Εξίσωση σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες:

$$x^3 + x \cdot (a^2 + y^2) = 2 \cdot a \cdot (x^2 + y^2).$$



#### 8. Φύλλο του Καρτέσιου

A. Εξίσωση σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες:

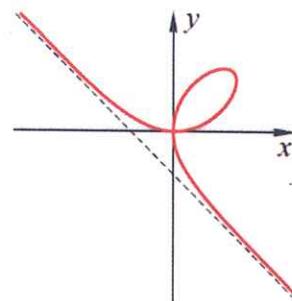
$$x^3 + y^3 = 3 \cdot a \cdot x \cdot y.$$

B. Παραμετρική Μορφή:

$$\begin{cases} x = \frac{3 \cdot a \cdot t}{1 + t^3} \\ y = \frac{3 \cdot a \cdot t^2}{1 + t^3} \end{cases}$$

άρα:

$$\vec{r}(t) = \left( \frac{3 \cdot a \cdot t}{1 + t^3}, \frac{3 \cdot a \cdot t^2}{1 + t^3} \right).$$

Γ. Ασύμπτωτη:

$$x + y + a = 0.$$

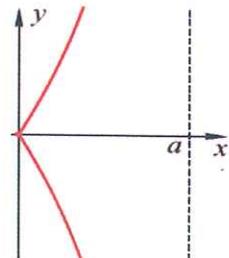
Δ. Εμβαδό:

$$E = \frac{3}{2} \cdot a^2.$$

9. Τριχοτομούσα

Εξίσωση σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες:

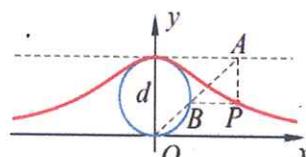
$$y^2 = \frac{x^2 \cdot (3 \cdot a + x)}{a - x}.$$

10. Μάγισσα της Agnesi

Το Α κινείται πάνω στην ευθεία  $y = d$ . Το Β είναι η τομή της OA με το σταθερό κύκλο κέντρου  $(0, d/2)$  και διαμέτρου  $d$ . Το P είναι η τομή των ευθειών που φέρονται από τα Α και Β παράλληλες προς τους άξονες.

A. Εξίσωση σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες:

$$y = \frac{d^3}{x^2 + d^2}.$$



**B. Παραμετρική Μορφή:**

$$\begin{cases} x = d \cdot \cot \varphi \\ y = d \cdot \sin^2 \varphi \end{cases}$$

άρα:

$$\vec{r}(t) = (d \cdot \cot \varphi, d \cdot \sin^2 \varphi),$$

όπου:

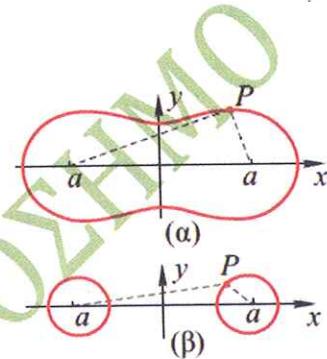
$$\varphi = \widehat{\text{AO}x}.$$

**11. Ωοειδής του Cassini**

Οι αποστάσεις του P από δύο σταθερά σημεία έχουν σταθερό γινόμενο ίσο με  $b^2$ .

Εξίσωση σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες:

$$(x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4 \cdot a^2 \cdot x^2 = b^4.$$



Αν  $a < b$  έχουμε το Σχήμα (α), ενώ αν  $a > b$  έχουμε το Σχήμα (β).

**12. Λημνίσκος του Bernoulli**

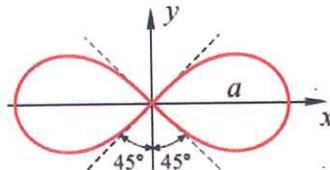
A. Εξίσωση σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 \cdot (x^2 - y^2).$$

B. Εξίσωση σε Πολικές Συντεταγμένες:

$$r^2 = a^2 \cdot \cos(2 \cdot \theta).$$

Γ. Εμβαδό (Ολικό):



$$E = a^2.$$

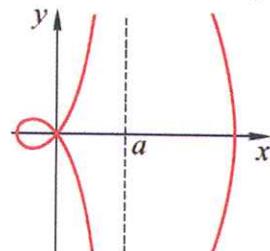
### 13. Κογχοειδής του Νικομήδη

A. Εξίσωση σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες:

$$(x^2 + y^2) \cdot (x - a)^2 = b^2 \cdot x^2.$$

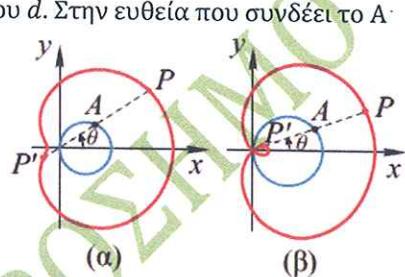
B. Εξίσωση σε Πολικές Συντεταγμένες:

$$r = \frac{a^2}{\cos \theta} + b.$$



### 14. Σαλίγκαρος του Pascal

Το A κινείται πάνω στο σταθερό κύκλο διαμέτρου  $d$ . Στην ευθεία που συνδέει το A με την αρχή των αξόνων παίρνουμε δύο σημεία P και P', με  $PA = P'A = b < 2 \cdot d$ , τα οποία διαγράφουν τη καμπύλη.



Εξίσωση σε Πολικές Συντεταγμένες:

$$r = b + d \cdot \cos \theta.$$

Αν  $b < d$  έχουμε το Σχήμα (α), ενώ αν  $b > d$  έχουμε το Σχήμα (β).

### 15. Καρδιοειδής

Ο κύκλος  $(B, a)$  κυλάει στο εξωτερικό του κύκλου  $(A, a)$ .

Το σημείο P διαγράφει τη καμπύλη.

A. Εξίσωση σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες:

$$(x^2 + y^2 - 2 \cdot \alpha \cdot x)^2 = 4 \cdot a^2 \cdot (x^2 + y^2).$$

B. Εξίσωση σε Πολικές Συντεταγμένες:

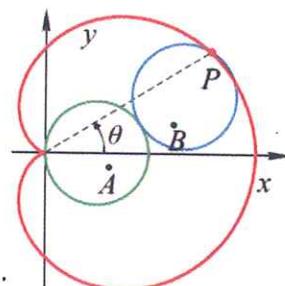
$$r = 2 \cdot \alpha \cdot (1 + \cos \theta).$$

Γ. Μήκος (Ολικό):

$$L = 8 \cdot \alpha.$$

Δ. Εμβαδό:

$$E = \frac{3}{2} \cdot \pi \cdot a^2.$$



### 16. Αστροειδής

Ο μικρός κύκλος με ακτίνα  $\alpha/4$  κυλάει μέσα στο μεγάλο κύκλο με ακτίνα  $\alpha$ . Το σημείο  $P$  διαγράφει τη καμπύλη.

A. Εξίσωση σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

B. Παραμετρική Μορφή:

$$\begin{cases} x = \alpha \cdot \cos^3 \varphi \\ y = \alpha \cdot \sin^3 \varphi \end{cases}$$

άρα:

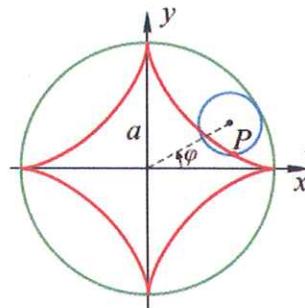
$$\vec{r}(t) = (\alpha \cdot \cos^3 \varphi, \alpha \cdot \sin^3 \varphi).$$

Γ. Μήκος (Ολικό):

$$L = 6 \cdot \alpha.$$

Δ. Εμβαδό:

$$E = \frac{3}{8} \cdot \pi \cdot a^2.$$



### 17. Τρίφυλλο Ρόδο

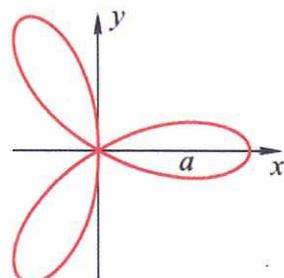
Εξίσωση σε Πολικές Συντεταγμένες:

$$r = \alpha \cdot \cos(3 \cdot \theta).$$

Γενικά, για  $n$  περιττό, η εξίσωση:

$$r = \alpha \cdot \cos(n \cdot \theta)$$

έχει  $n$  φύλλα.



### 18. Τετράφυλλο Ρόδο

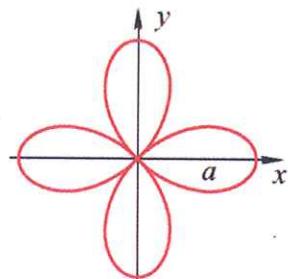
Εξίσωση σε Πολικές Συντεταγμένες:

$$r = \alpha \cdot \cos(2 \cdot \theta).$$

Γενικά, για  $n$  άρτιο, η εξίσωση:

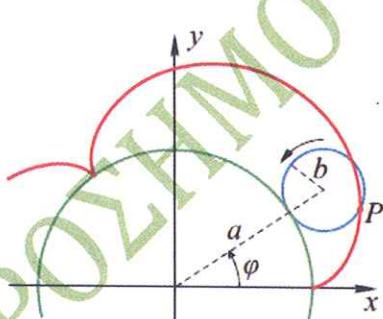
$$r = \alpha \cdot \cos(n \cdot \theta)$$

έχει  $2 \cdot n$  φύλλα.



### 19. Επικυκλοειδής

Ο μικρός κύκλος κυλάει στο εξωτερικό του μεγάλου. Το σημείο  $P$  είναι σταθερό ως προς το μικρό κύκλο, απέχει  $c$  από το κέντρο του και διαγράφει τη καμπύλη.



Παραμετρική Μορφή:

$$\begin{cases} x = (\alpha + b) \cdot \cos \varphi - c \cdot \cos \left( \frac{\alpha + b}{b} \cdot \varphi \right) \\ y = (\alpha + b) \cdot \sin \varphi - c \cdot \sin \left( \frac{\alpha + b}{b} \cdot \varphi \right) \end{cases}$$

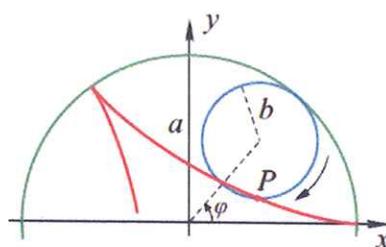
άρα:

$$\vec{r}(t) = \left( (\alpha + b) \cdot \cos \varphi - c \cdot \cos \left( \frac{\alpha + b}{b} \cdot \varphi \right), (\alpha + b) \cdot \sin \varphi - c \cdot \sin \left( \frac{\alpha + b}{b} \cdot \varphi \right) \right).$$

Στο παραπάνω σχήμα απεικονίζουμε τη περίπτωση όπου  $b = c$ .

### 20. Υποκυκλοειδής

Ο μικρός κύκλος κυλάει στο εσωτερικό του μεγάλου. Το σημείο  $P$  είναι σταθερό ως προς το μικρό κύκλο, απέχει  $c$  από το κέντρο του και διαγράφει τη καμπύλη.



Παραμετρική Μορφή:

$$\begin{cases} x = (\alpha - b) \cdot \cos \varphi + c \cdot \cos \left( \frac{a-b}{b} \cdot \varphi \right) \\ y = (\alpha - b) \cdot \sin \varphi - c \cdot \sin \left( \frac{a-b}{b} \cdot \varphi \right) \end{cases}$$

άρα:

$$\vec{r}(t) = \left( (\alpha - b) \cdot \cos \varphi + c \cdot \cos \left( \frac{a-b}{b} \cdot \varphi \right), (\alpha - b) \cdot \sin \varphi - c \cdot \sin \left( \frac{a-b}{b} \cdot \varphi \right) \right).$$

Στο παραπάνω σχήμα απεικονίζουμε τη περίπτωση όπου  $b = c$ .

## 21. Κυκλοειδής

Ο κύκλος  $(K, a)$  κυλάει πάνω στον άξονα  $Ox$ .

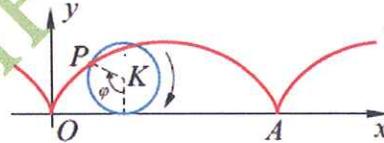
Το σημείο  $P$  είναι σταθερό στη περιφέρεια και διαγράφει τη καμπύλη.

A. Παραμετρική Μορφή:

$$\begin{cases} x = a \cdot (\varphi - \sin \varphi) \\ y = a \cdot (1 - \cos \varphi) \end{cases}$$

άρα:

$$\vec{r}(t) = (a \cdot (\varphi - \sin \varphi), a \cdot (1 - \cos \varphi)).$$



B. Μήκος του Τόξου OA:

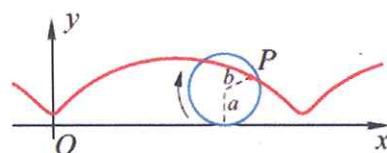
$$s = 8 \cdot \alpha.$$

C. Εμβαδό ενός Τμήματος:

$$E = 3 \cdot \pi \cdot a^2.$$

## 22. Τροχοειδής

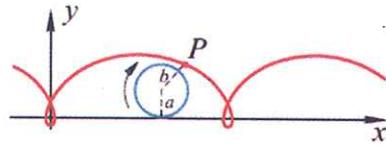
Ο κύκλος με ακτίνα  $a$  κυλάει πάνω στον άξονα  $Ox$ . Το σημείο  $P$  είναι σταθερό ως προς το κύκλο, απέχει απόσταση  $b$  από το κέντρο και διαγράφει



τη καμπύλη.

Παραμετρική Μορφή:

$$\begin{cases} x = a \cdot \varphi - b \cdot \sin \varphi \\ y = a - b \cdot \cos \varphi \end{cases}$$



άρα:

$$\vec{r}(t) = (a \cdot \varphi - b \cdot \sin \varphi, a - b \cdot \cos \varphi)$$

Αν  $b < a$  έχουμε το άνω Σχήμα, ενώ αν  $b > a$  έχουμε το κάτω Σχήμα.

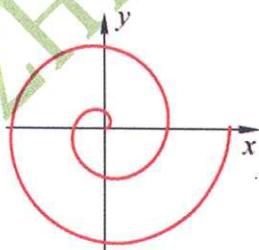
Στη περίπτωση όπου  $a = b$ , λαμβάνουμε τη Κυκλοειδή καμπύλη που αναφέραμε πιο πάνω.

### 23. Σπείρα

#### I. Γραμμική Σπείρα (του Αρχιμήδη)

Εξίσωση σε Πολικές Συντεταγμένες:

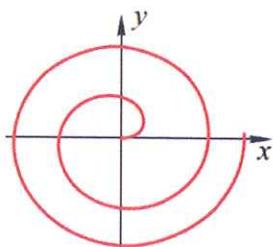
$$r = \alpha \cdot \theta$$



#### II. Παραβολική Σπείρα

Εξίσωση σε Πολικές Συντεταγμένες:

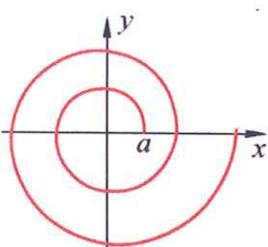
$$r^2 = 4 \cdot \pi \cdot \theta$$



#### III. Λογαριθμική Σπείρα

Εξίσωση σε Πολικές Συντεταγμένες:

$$r = \alpha \cdot e^{b \cdot \theta}$$



#### 24. Ενειλιγμένη Κύκλου

Το σημείο  $P$  είναι το άκρο ενός σχοινιού που είναι τυλιγμένο σ' ένα κύκλο ακτίνας  $a$ . Το σκοινί ξετυλίγεται και το  $P$  διαγράφει τη καμπύλη.

Παραμετρική Μορφή:

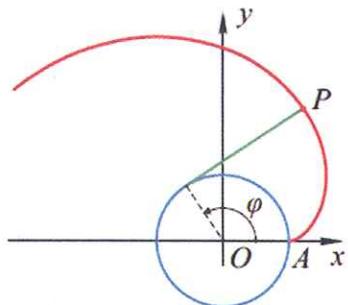
$$\begin{cases} x = a \cdot (\cos \varphi + \varphi \cdot \sin \varphi) \\ y = a \cdot (\sin \varphi - \varphi \cdot \cos \varphi) \end{cases}$$

άρα:

$$\vec{r}(t) = (a \cdot (\cos \varphi + \varphi \cdot \sin \varphi), a \cdot (\sin \varphi - \varphi \cdot \cos \varphi)).$$

Μήκος Τόξου:

$$s = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \varphi^2.$$



#### 25. Αλυσοειδής

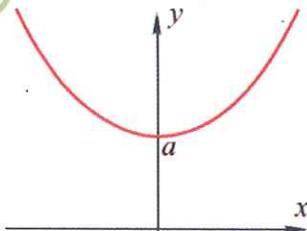
Στο διπλανό σχήμα απεικονίζεται μία ομογενής αλυσίδα αναρτημένη μεταξύ δύο σημείων.

A. Εξίσωση σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες:

$$y = \frac{a}{2} \cdot (e^{x/a} + e^{-x/a}).$$

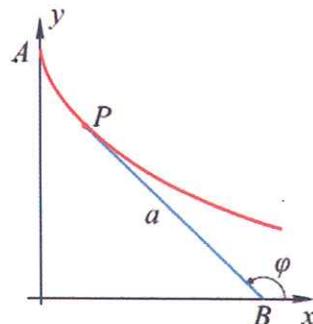
B. Μήκος από  $-x$  έως  $x$ :

$$s = 2 \cdot \alpha \cdot \sinh\left(\frac{x}{a}\right).$$



#### 26. Έλκουσα

Η καμπύλη αρχίζει από το σημείο  $A(a, 0)$ . Η εφαπτομένη στο τυχόν σημείο  $P$  τέμνει τον άξονα  $Ox$  στο σημείο  $B$ . Το μήκος  $PB$  παραμένει σταθερό και ίσο με  $a$ .



Παραμετρική Μορφή:

$$\begin{cases} x = a \cdot \left[ \cos \varphi + \ln \left( \tan \left( \frac{\varphi}{2} \right) \right) \right], \\ y = a \cdot \sin \varphi \end{cases}$$

άρα:

$$\vec{r}(t) = \left( a \cdot \left[ \cos \varphi + \ln \left( \tan \left( \frac{\varphi}{2} \right) \right) \right], a \cdot \sin \varphi \right).$$

**Σχόλιο:** Γενικά, οι καμπύλες που δίνονται στη μορφή:

$$y = f(x)$$

επιδέχονται την ακόλουθη παραμετρική μορφή:

$$\vec{r}(t) = (t, f(t)).$$

Φοιτητικό Πρόσημο