ΕΙΔΙΚΕΣ ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ & ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

Κυριότερες Διακριτές Κατανομές

Δοκιμή Bernoulli ->	Πείραμα με δυο δυνατά αποτελέσματα: επιτυχία (ε) ή αποτυχία (α)
Κατανομή Bernoulli	$f(x) = p^x q^{1-x}, \quad x = 0,1 \quad (q = 1 - p)$ $E(X) = p, \quad Var(X) = pq$
Διωνυμική Κατανομή $\boldsymbol{B(n,p)}$	Είναι η κατανομή του αριθμού των επιτυχιών σε n ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli με την ίδια πιθανότητα επιτυχίας p. $f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x = 0,1,\dots,n$ $E(X) = np, \quad Var(X) = npq$ $M_t = (pe^t + q)^n$
Κατανομή Poisson $\boldsymbol{P(\lambda)}$	Είναι η κατανομή που μας δείχνει το ρυθμό λ εμφάνισης ενός γεγονότος. $f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0,1,2,\dots$ $E(X) = \lambda, \quad Var(X) = \lambda$ $M_t = e^{\lambda(e^t - 1)}$
Γεωμετρική Κατανομή $\boldsymbol{G(p)}$	Είναι η κατανομή του αριθμού των δοκιμών Bernoulli (ανεξάρτητων και με ίδια πιθανότητα επιτυχίας p) που πρέπει να εκτελεστούν μέχρις ότου εμφανιστεί η πρώτη επιτυχία. $f(x) = pq^{x-1}, \quad x = 1,2,\dots$ $F(t) = 1 - q^t$ $E(X) = \frac{1}{p}, \quad Var(X) = \frac{q}{p^2}$ <u>Έλλειψη Μνήμης</u>: $P(X > x_2 + x_1 \mid X > x_1) = P(X > x_2) = q^{x_2}$ $M_t = \frac{pe^t}{1 - qe^t}$

ΦΟΙΤΗΤΙΚΟ ΠΡΟΣΗΜΟ

Αρνητική Διωνυμική Κατανομή $\boldsymbol{NB(r,p)}$	Είναι η κατανομή του αριθμού των δοκιμών Bernoulli (ανεξάρτητων και με ίδια πιθανότητα επιτυχίας p) που πρέπει να εκτελεστούν μέχρι την εμφάνιση της r επιτυχίας. $$f(x) = \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r}, \quad x = r, r+1, \dots$$ $$E(X) = \frac{r}{p}, \quad Var(X) = \frac{rq}{p^2}$$ $$M_t = \left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^r, \quad \text{ισχύει αν } \lvert qe^t \rvert < 1$$
Υπεργεωμετρική Κατανομή $\boldsymbol{H(n,a,\beta)}$	Είναι η κατανομή των α αντικειμένων που περιέχονται σε ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n το οποίο λαμβάνεται (χωρίς επανατοποθέτηση) από μια κάλπη με $N = \alpha + \beta$ αντικείμενα. $$f(x) = \frac{\binom{\alpha}{x}\binom{\beta}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad x = 0,1,\dots,n$$ $$E(X) = n \cdot \frac{\alpha}{N}, \quad Var(X) = n \cdot \frac{\alpha\beta}{N^2} \cdot \left(1 - \frac{n-1}{N-1}\right)$$

Προσέγγιση της $\boldsymbol{H(n,a,\beta)}$ από την $\boldsymbol{B(n,p)}$

Αν $\alpha \to \infty$ και $\beta \to \infty$ έτσι ώστε $\frac{\alpha}{N} \to p$, τότε:

$$\frac{\binom{\alpha}{x}\binom{\beta}{n-x}}{\binom{N}{n}} \to \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x = 0,1,\dots,n$$

Προσέγγιση της $\boldsymbol{B(n,p)}$ από την $\boldsymbol{P(\lambda)}$

Αν $n \to \infty$ και $p \to 0$ έτσι ώστε $np \to \lambda > 0$ τότε:

$$\binom{n}{x} p^x q^{n-x} \to \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, \quad x = 0,1,2,\dots$$

ΦΟΙΤΗΤΙΚΟ ΠΡΟΣΗΜΟ

Κυριότερες Συνεχείς Κατανομές

Ομοιόμορφη Κατανομή $\boldsymbol{U(\alpha,\beta)}$	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta-a}, & \alpha\le x\le\beta\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$ $F(t)=\begin{cases}0, & t<a\\ \dfrac{t-a}{\beta-\alpha}, & \alpha\le t\le\beta\\ 1, & t>\beta\end{cases}$ $E(X)=\dfrac{a+\beta}{2},\quad Var(X)=\dfrac{(\beta-a)^2}{12}$ $M_t=\dfrac{e^{t\beta}-e^{t\alpha}}{(\beta-\alpha)t}$
Εκθετική Κατανομή $\boldsymbol{E(\lambda)}$	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$ $F(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1-e^{-\lambda t}, & t\ge 0\end{cases}$ $E(X)=\dfrac{1}{\lambda},\quad Var(X)=\dfrac{1}{\lambda^2}$ <u>Έλλειψη Μνήμης</u>: $P(X>x_2+x_1\mid X>x_1)=P(X>x_2)=e^{-\lambda x_2}$ $M_t=\dfrac{\lambda}{\lambda-t}$
Κανονική Κατανομή $\boldsymbol{N(\mu,\sigma^2)}$	$f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<\infty$ $E(X)=\mu,\quad Var(X)=\sigma^2$ $M_t=e^{\left(\mu t+\frac{\sigma^2t^2}{2}\right)}$

ΦΟΙΤΗΤΙΚΟ ΠΡΟΣΗΜΟ

Τυποποιημένη Κανονική Κατανομή $N(0,1)$	$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad -\infty < z < \infty$$ $$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$ $$E(z) = 0, \quad Var(X) = 1$$
Ιδιότητες Κανονικής Κατανομής	$$\text{Αν } X \sim N(\mu, \sigma^2) \text{ τότε } Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$$ $$P(a < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-\mu}{\sigma}\right)$$ $$\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$$
Κατανομή Γάμμα $\Gamma(\alpha, \lambda)$ **Ιδιότητες Κατανομής Γάμμα**	$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$ $$E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}, \quad Var(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$ $$M_t = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^\alpha$$ $$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \ a > 0$$ $$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$$ $$\Gamma(1) = 1$$ $$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad \text{για ακέραιο } n > 0$$ $$\Gamma(n+1) = n!, \quad \text{για ακέραιο } n > 0$$ $$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

ΦΟΙΤΗΤΙΚΟ ΠΡΟΣΗΜΟ

Κατανομή Βήτα $\boldsymbol{B(\alpha,\beta)}$ $(\boldsymbol{\alpha>0,\beta>0})$	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{B(\alpha,\beta)}\,x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, & \alpha\nu\ 0\le x\le 1\\ 0, & \text{αλλού}\end{cases}$ όπου $B(a,\beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx=\dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ $E(X)=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta},\quad Var(X)=\dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}$

Προσέγγιση της $B(n,p)$ από την $N(\mu,\sigma^2)$ με Διόρθωση Συνέχειας

Αν η τ.μ. $X\sim B(n,p)$ με μεγάλο n $(n\to\infty)$ και α,β είναι μη αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί $(\alpha\le\beta)$, τότε:

$$P(a\le X\le\beta)\cong\Phi\left(\frac{\beta-np+0.5}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-np-0.5}{\sqrt{npq}}\right)$$

Προσέγγιση της $P(\lambda)$ από την $N(\mu,\sigma^2)$ με Διόρθωση Συνέχειας

Αν η τ.μ. $X\sim P(\lambda)$ για μεγάλες τιμές του λ και α,β είναι μη αρνητικοί ακέραιοι αριθμοί $(\alpha\le\beta)$, τότε:

$$P(a\le X\le\beta)\cong\Phi\left(\frac{\beta-\lambda+0.5}{\sqrt{\lambda}}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-\lambda-0.5}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

Ασθενής Νόμος των Μεγάλων Αριθμών

Αν X_i $(i=1,2,\dots,n)$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. με $E(X_i)=\mu, Var(X_i)=\sigma^2$, τότε:

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\overline{X}-\mu\right|>\varepsilon\right)=0$$

ΦΟΙΤΗΤΙΚΟ ΠΡΟΣΗΜΟ

Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (Κ.Ο.Θ.)

Αν X_i $(i = 1,2, \dots, n)$ είναι ανεξάρτητες τ.μ. με $E(X_i) = \mu, Var(X_i) = \sigma^2$, τότε για μεγάλο δείγμα $(n \geq 30)$:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

ή

$$\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

ΦΟΙΤΗΤΙΚΟ ΠΡΟΣΗΜΟ