Διπλά Ολοκληρώματα

1. Σε Ορθογώνια (ή Τετράγωνα)

Έστω $f: T \subset \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ μία συνεχής συνάρτηση στο **κλειστό ορθογωνικό χωρίο**:

$$T = \{(x, y) \in \mathrm{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}.$$

Τότε, το **διπλό ολοκλήρωμα** της συνάρτησης f στο χωρίο T, μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\boxed{\begin{cases} \iint\limits_T f(x,y)\,dA = \int\limits_{y=c}^{d} \int\limits_{x=a}^{b} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{y=c}^{d} \left[\int\limits_{x=a}^{b} f(x,y)\,dx \right] dy \\ \iint\limits_T f(x,y)\,dA = \int\limits_{x=a}^{b} \int\limits_{y=c}^{d} f(x,y)\,dydx = \int\limits_{x=a}^{b} \left[\int\limits_{y=c}^{d} f(x,y)\,dy \right] dx \end{cases}}$$

(**Θεώρημα Fubini**).

Στη περίπτωση όπου $a = c$ και $b = d$, το χωρίο T θα είναι **τετραγωνικό**.

2. Σε πιο Γενικά Χωρία (Χωρία Τύπου 1 και 2)

I. Έστω $f: T \subset \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ μία συνεχής συνάρτηση στο κλειστό και φραγμένο χωρίο (**Τύπου 1**):

$$T = \{(x, y) \in \mathrm{R}^2 : a \leq x \leq b, h_1(x) \leq y \leq h_2(x)\}.$$

Τότε, το **διπλό ολοκλήρωμα** της συνάρτησης f στο χωρίο T, μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\boxed{\iint\limits_T f(x,y)\,dA = \int\limits_{x=a}^{b} \int\limits_{y=h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)\,dydx = \int\limits_{x=a}^{b} \left[\int\limits_{y=h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)\,dy \right] dx}.$$

II. Έστω $f: T \subset \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ μία συνεχής συνάρτηση στο κλειστό και φραγμένο χωρίο (**Τύπου 2**):

$$T = \{(x, y) \in \mathrm{R}^2 : c \leq y \leq d, g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\}.$$

Τότε, το **διπλό ολοκλήρωμα** της συνάρτησης f στο χωρίο T, μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\boxed{\iint\limits_T f(x,y)\,dA = \int\limits_{y=c}^{d} \int\limits_{x=g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_{y=c}^{d} \left[\int\limits_{x=g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dx \right] dy}.$$

ΦΟΙΤΗΤΙΚΟ ΠΡΟΣΗΜΟ

3. Αλλαγή Σειράς Ολοκλήρωσης (Χωρία Τύπου 3)

Έστω $f: T \subset \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ μία συνεχής συνάρτηση σε ένα κλειστό και φραγμένο χωρίο **Τύπου 3**, δηλαδή σ' ένα χωρίο D που ταυτόχρονα μπορεί να γραφτεί ως Χωρίο Τύπου 1, αλλά και ως Χωρίο Τύπου 2.

Τότε, το **διπλό ολοκλήρωμα** της συνάρτησης f στο χωρίο T, μπορεί να γραφτεί με έναν από τους τρόπους της Περίπτωσης 2, και φυσικά ισχύει ότι:

$$\int_{y=c}^{d} \int_{x=g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\, dxdy = \int_{x=a}^{b} \int_{y=h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)\, dydx,$$

δηλαδή:

$$\boxed{\int_{y=c}^{d} \left[\int_{x=g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\, dx \right] dy = \int_{x=a}^{b} \left[\int_{y=h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)\, dy \right] dx}.$$

4. Αλλαγή Συστήματος Συντεταγμένων

Έστω $f: T \subset \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ μία συνεχής συνάρτηση σε ένα κλειστό και φραγμένο χωρίο T (στο σύστημα συντεταγμένων (x,y)). Τότε, υπό την αλλαγή μεταβλητών:

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases},$$

το χωρίο T, μετατρέπεται στο ισοδύναμο (ισεμβαδικό) χωρίο T' (στο σύστημα συντεταγμένων (u,v)), και για το **διπλό ολοκλήρωμα** της συνάρτησης f στο χωρίο T, ισχύει ότι:

$$\boxed{\iint_T f(x,y)\, dxdy = \iint_{T'} f\big(x(u,v), y(u,v)\big) \cdot \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| dudv},$$

όπου:

$$\left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

η **Ιακωβιανή Ορίζουσα** (κατ' απόλυτη τιμή) από το (αρχικό) σύστημα συντεταγμένων (x,y) στο (νέο) σύστημα συντεταγμένων (u,v).

ΦΟΙΤΗΤΙΚΟ ΠΡΟΣΗΜΟ

5. Εμβαδόν Χωρίου του R^2

Στη περίπτωση που η συνεχής συνάρτηση $f: T \subset \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ σε ένα κλειστό και φραγμένο χωρίο T λαμβάνει τη τιμή 1, δηλαδή $f(x, y) = 1$, τότε έχουμε τα διπλά ολοκληρώματα:

$$\iint_T dxdy \text{ και } \iint_T dydx,$$

που εκφράζουν το **Εμβαδόν του Χωρίου $\boldsymbol{T}$**, και φυσικά ισχύει ότι:

$$\iint_T dxdy = \iint_T dydx,$$

δηλαδή για γενικά χωρία Τύπου 3, θα έχουμε:

$$\boxed{\int_{y=c}^{d} \left(\int_{x=g_1(y)}^{g_2(y)} dx \right) dy = \int_{x=a}^{b} \left(\int_{y=h_1(x)}^{h_2(x)} dy \right) dx}.$$

ΦΟΙΤΗΤΙΚΟ ΠΡΟΣΗΜΟ