Διανυσματική Ανάλυση

1. Συναρτήσεις

- Μία απεικόνιση $f: \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}$ της μορφής $f = f(x, y, z)$ καλείται **βαθμωτή συνάρτηση**.
- Μία απεικόνιση $\vec{F}: \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^3$ της μορφής $\vec{F} = \big(F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z)\big)$ καλείται **διανυσματική συνάρτηση**.

2. Πράξεις

Αν $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ είναι τρία διανύσματα του R^3, έστω των μορφών $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ και $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$, και a, b δύο πραγματικοί αριθμοί, τότε ορίζονται τοι παρακάτω ποσότητες:

I. Πρόσθεση Διανυσμάτων και Πολλαπλασιασμός Αριθμού με Διάνυσμα

- $\vec{u} + \vec{v} = (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

- $a \cdot \vec{u} = a \cdot (u_1, u_2, u_3) \Rightarrow$

$$\Rightarrow a \cdot \vec{u} = (a \cdot u_1, a \cdot u_2, a \cdot u_3).$$

Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
3. $a \cdot (b \cdot \vec{u}) = (a \cdot b) \cdot \vec{u} = b \cdot (a \cdot \vec{u})$
4. $(a + b) \cdot \vec{u} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{u}$
5. $a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = a \cdot \vec{u} + a \cdot \vec{v}$.

II. Εσωτερικό ή Βαθμωτό Γινόμενο Διανυσμάτων

- $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta$, όπου $\theta \in [0, \pi]$ η γωνία των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$
- $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle (u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3) \rangle \Rightarrow$

$$\Rightarrow \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3.$$

Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

1. $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$
2. $\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$
3. $a \cdot \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle a \cdot \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, a \cdot \vec{v} \rangle$
4. $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \|\vec{u}\|^2 = {u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2$
5. $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$
6. $\vec{u} // \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} = a \cdot \vec{v}$
7. $\vec{u} \uparrow\uparrow \vec{v} \Leftrightarrow \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$
8. $\vec{u} \uparrow\downarrow \vec{v} \Leftrightarrow \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = -\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|.$

III. Εξωτερικό ή Διανυσματικό Γινόμενο Διανυσμάτων

- $\vec{u} \times \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin\theta$, όπου θ η γωνία των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$.
- $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \Rightarrow$

  $$\Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = (u_2 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_2, u_3 \cdot v_1 - u_1 \cdot v_3, u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1).$$
- $|\vec{u} \times \vec{v}|$: εμβαδό παραλληλογράμμου με πλευρές $\|\vec{u}\|$ και $\|\vec{v}\|$.

Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

1. $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$
2. $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$
3. $a \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = (a \cdot \vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (a \cdot \vec{v})$
4. $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} // \vec{v}$
5. $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$
6. $\vec{\imath} \times \vec{\jmath} = \vec{k}, \vec{\jmath} \times \vec{k} = \vec{\imath}, \vec{k} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath}.$

IV. Μικτό Γινόμενο Διανυσμάτων

- $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \langle \vec{u}\times\vec{v},\vec{w}\rangle$.
- $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow [\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = u_1\cdot\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} - u_2\cdot\begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix} + u_3\cdot\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = u_1\cdot(v_2\cdot w_3 - v_3\cdot w_2) - u_2\cdot(v_1\cdot w_3 - v_3\cdot w_1) +$$

$$+u_3\cdot(v_1\cdot w_2 - v_2\cdot w_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = u_1\cdot v_2\cdot w_3 - u_1\cdot v_3\cdot w_2 + u_2\cdot v_3\cdot w_1 - u_2\cdot v_1\cdot w_3 +$$

$$+u_3\cdot v_1\cdot w_2 - u_3\cdot v_2\cdot w_1.$$

- $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$: όγκος παραλληλεπιπέδου με πλευρές $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$ και $\|\vec{w}\|$.

Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

1. $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = [\vec{v},\vec{w},\vec{u}] = [\vec{w},\vec{u},\vec{v}]$ ή $\langle \vec{u},\vec{v}\times\vec{w}\rangle] = \langle \vec{v},\vec{w}\times\vec{u}\rangle = \langle w,\vec{u}\times\vec{v}\rangle$
2. $\langle \vec{u}\times\vec{v},\vec{w}\rangle = \langle \vec{u},\vec{v}\times\vec{w}\rangle$
3. $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = -[\vec{v},\vec{u},\vec{w}]$
4. $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = 0 \Leftrightarrow \vec{u},\vec{v},\vec{w}$ συνεπίπεδα διανύσματα
5. Αν τουλάχιστον δύο από τα $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ είναι παράλληλα, τότε ισχύει ότι

   $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = 0$.

V. Συνδυαστικές Ιδιότητες Γινομένων μεταξύ Διανυσμάτων

1. $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) = \vec{v}\cdot\langle \vec{u},\vec{w}\rangle - \vec{w}\cdot\langle \vec{u},\vec{v}\rangle$
2. $\langle \vec{u}\times\vec{v},\vec{w}\times\vec{y}\rangle = \langle \vec{u},\vec{w}\rangle\cdot\langle \vec{v},\vec{y}\rangle - \langle \vec{u},\vec{y}\rangle\cdot\langle \vec{v},\vec{w}\rangle$
3. $(\vec{u}\times\vec{v})\times(\vec{w}\times\vec{y}) = \vec{w}\cdot\langle \vec{u},\vec{v}\times\vec{y}\rangle - \vec{y}\cdot\langle \vec{u},\vec{v}\times\vec{w}\rangle$
4. $(\vec{u}\times\vec{v})\times(\vec{w}\times\vec{y}) = \vec{v}\cdot\langle \vec{u},\vec{w}\times\vec{y}\rangle - \vec{u}\cdot\langle \vec{v},\vec{w}\times\vec{y}\rangle$.

3. Ποσότητες της Διανυσματικής Ανάλυσης

Ο **τελεστής Ανάδελτα** ορίζεται από τη σχέση:

$$\vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right),$$

και στη συνέχεια, βάσει αυτού, θεωρώντας ότι οι συναρτήσεις $f: \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}$ και

$\vec{F}: \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^3$ είναι κλάσεως C^2, ορίζονται οι παρακάτω ποσότητες:

I. Κλίση Βαθμωτής Συνάρτησης f

$$\mathrm{grad} f(x,y,z) = \vec{\nabla} f(x,y,z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{grad} f(x,y,z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) f(x,y,z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{grad} f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\right): \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^3.$$

II. Απόκλιση Διανυσματικής Συνάρτησης $\vec{F}$

$$\mathrm{div}\vec{F}(x,y,z) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F}(x,y,z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{div}\vec{F}(x,y,z) = \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right), \left(F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z)\right) \right\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{div}\vec{F}(x,y,z) = \frac{\partial F_1(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial F_2(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial F_3(x,y,z)}{\partial z}: \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}.$$

III. Στροβιλισμός ή Περιστροφή Διανυσματικής Συνάρτησης $\vec{F}$

$$\mathrm{curl}\vec{F}(x,y,z) = \vec{\nabla} \times \vec{F}(x,y,z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{curl}\vec{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1(x,y,z) & F_2(x,y,z) & F_3(x,y,z) \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{curl}\vec{F}(x,y,z) = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_2(x,y,z) & F_3(x,y,z) \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1(x,y,z) & F_3(x,y,z) \end{vmatrix}, \right.$$

$$\left. , \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ F_1(x,y,z) & F_2(x,y,z) \end{vmatrix} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{curl}\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{\partial F_3(x,y,z)}{\partial y} - \frac{\partial F_2(x,y,z)}{\partial z}, \frac{\partial F_1(x,y,z)}{\partial z} - \frac{\partial F_3(x,y,z)}{\partial x}, \right.$$

$$\left. , \frac{\partial F_2(x,y,z)}{\partial x} - \frac{\partial F_1(x,y,z)}{\partial y} \right): \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^3.$$

IV. Τελεστής Laplace

- **Βαθμωτής Συνάρτησης f:**

$$\vec{\Delta} f(x,y,z) = \vec{\nabla}^2 f(x,y,z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\Delta} f(x,y,z) = \langle \vec{\nabla}, \vec{\nabla} f(x,y,z) \rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\Delta} f(x,y,z) = \langle \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right), \left(\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}, \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\right) \rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\Delta} f(x,y,z) = \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z^2} : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}.$$

- **Διανυσματικής Συνάρτησης $\vec{F}$:**

$$\vec{\Delta} \vec{F}(x,y,z) = \vec{\nabla}^2 \vec{F}(x,y,z) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\Delta} \vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 F_3}{\partial z^2}\right) : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^3.$$

V. Ταυτότητες Διανυσματικής Ανάλυσης

Αν $f, g: \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}$ είναι βαθμωτές συναρτήσεις και $\vec{F}, \vec{G}, \vec{H}: \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^3$ είναι διανυσματικές συναρτήσεις κλάσεως C^2, τότε ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

1. $\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla} f + \vec{\nabla} g$
2. $\vec{\nabla}(c \cdot f) = c \cdot (\vec{\nabla} f)$ (c: σταθερά)
3. $\vec{\nabla}(f \cdot g) = f \cdot (\vec{\nabla} g) + g \cdot (\vec{\nabla} f)$
4. $\vec{\nabla}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f \cdot (\vec{\nabla} g) - g \cdot (\vec{\nabla} f)}{g^2}, g \neq 0$
5. $\vec{\nabla}(\langle \vec{F}, \vec{G} \rangle) = \langle \vec{F}, \vec{\nabla} \rangle \cdot \vec{G} + \langle \vec{G}, \vec{\nabla} \rangle \cdot \vec{F} + \vec{F} \times (\vec{\nabla} \times \vec{G}) + \vec{G} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F})$
6. $\vec{\nabla}(\langle \vec{F}, \vec{F} \rangle) = 2\,\langle \vec{F}, \vec{\nabla} \rangle \cdot \vec{F} + \langle \vec{G}, \vec{\nabla} \rangle \cdot \vec{F} + 2 \cdot \vec{F} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F})$
7. $\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} + \vec{G}) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) + (\vec{\nabla} \cdot \vec{G})$
8. $\vec{\nabla} \cdot (c \cdot \vec{F}) = c \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{F})$ (c: σταθερά)
9. $\vec{\nabla} \cdot (f \cdot \vec{F}) = f \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) + \vec{F} \cdot \vec{\nabla} f$
10. $\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = \langle \vec{G}, \vec{\nabla} \times \vec{F} \rangle - \langle \vec{F}, \vec{\nabla} \times \vec{G} \rangle$
11. $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$
12. $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f \times \vec{\nabla} g) = 0$

13. $\vec{\nabla}\cdot\left[f\cdot\left(\vec{\nabla}g\right)-g\cdot\left(\vec{\nabla}f\right)\right]=f\cdot\left(\vec{\nabla}^2g\right)-g\cdot\left(\vec{\nabla}^2f\right)$

14. $\langle\vec{F},\vec{\nabla}\rangle\cdot\left(f\cdot\vec{G}\right)=\vec{G}\cdot\langle\vec{F},\vec{\nabla}f\rangle+f\cdot\langle\vec{F},\vec{\nabla}\rangle\cdot\vec{G}$

15. $\langle\vec{F},\vec{\nabla}\rangle\cdot\vec{G}=\frac{1}{2}\cdot\left[\vec{\nabla}\times\left(\vec{G}\times\vec{F}\right)+\vec{\nabla}\left(\langle\vec{F},\vec{G}\rangle\right)+\langle\vec{F},\vec{\nabla}\cdot\vec{G}\rangle-\langle\vec{G},\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\rangle-\right.$

$\left.-\vec{F}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right)-\vec{G}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)\right]$

16. $\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}+\vec{G}\right)=\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)+\left(\vec{\nabla}\times\vec{G}\right)$

17. $\vec{\nabla}\times\left(c\cdot\vec{F}\right)=c\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)$ (c: σταθερά)

18. $\vec{\nabla}\times\left(f\cdot\vec{F}\right)=\left(\vec{\nabla}f\right)\times\vec{F}+f\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)$

19. $\vec{\nabla}\times\left(\vec{F}\times\vec{G}\right)=\vec{F}\cdot\left(\nabla\cdot\vec{G}\right)-\vec{G}\cdot\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)-\langle\vec{F},\vec{\nabla}\rangle\cdot\vec{G}+\vec{F}\cdot\langle\vec{G}\cdot\vec{\nabla}\rangle$

20. $\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)-\vec{\nabla}^2\vec{F}$

21. $\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}f\right)=\vec{0}$

22. $\langle\vec{H},\left(\vec{F}\times\vec{\nabla}\right)\times\vec{G}\rangle=\langle\langle\vec{H},\vec{\nabla}\rangle\cdot\vec{G},\vec{F}\rangle-\langle\vec{H},\vec{F}\rangle\cdot\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{G}\right)$

23. $\vec{\nabla}^2(f\cdot g)=f\cdot\left(\vec{\nabla}^2g\right)+g\cdot\left(\vec{\nabla}^2f\right)+2\cdot\langle\vec{\nabla}f,\vec{\nabla}g\rangle.$

1. Θεωρήματα της Διανυσματικής Ανάλυσης

I. Θεώρημα Green

$$\boxed{\oint_C\left[P(x,y)\,dx+Q(x,y)\right]=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy}$$

$$\boxed{\oint_C\vec{F}\cdot d\vec{s}=\iint_D \mathrm{curl}\vec{F}\cdot\vec{k}\,dx\,dy},$$

όπου:

D: κλειστή περιοχή (χωρίο) του R^2 (επίπεδο xy)

C: σύνορο του χωρίου D (κλειστή και τμηματικά διαφορίσιμη καμπύλη)

$\vec{F}(x,y)=\left(P(x,y),Q(x,y)\right)$: διανυσματική συνάρτηση αποτελούμενη από δύο συνεχείς συναρτήσεις δύο μεταβλητών, με συνεχείς μερικές παραγώγους επί του D.

II. Θεώρημα Stokes

$$\boxed{\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_S \mathrm{curl}\vec{F} \cdot \vec{n}\, dS},$$

όπου:

S: διαφορίσιμη και προσανατολισμένη επιφάνεια

C: σύνορο της επιφάνειας S (κλειστή και τμηματικά διαφορίσιμη καμπύλη)

$\vec{F}(x,y,z) = \big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\big)$: διανυσματική συνάρτηση αποτελούμενη από τρεις συνεχείς συναρτήσεις τριών μεταβλητών, με συνεχείς μερικές παραγώγους στο χώρο που περιορίζεται από την επιφάνεια S.

III. Θεώρημα Gauss

$$\boxed{\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_V \mathrm{div}\vec{F}\, dx\, dy\, dz},$$

όπου:

V: χωρίο του R^3

S: σύνορο του χωρίου V (διαφορίσιμη και προσανατολισμένη επιφάνεια)

$\vec{F}(x,y,z) = \big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\big)$: διανυσματική συνάρτηση αποτελούμενη από τρεις συνεχείς συναρτήσεις τριών μεταβλητών, με συνεχείς μερικές παραγώγους επί του χωρίου V.