Γραμμικές Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις Ανώτερης Τάξης, μη Ομογενείς, με Σταθερούς Συντελεστές (Εύρεση Ειδικής Λύσης)

1. Μέθοδος Προσδιορισμού των Συντελεστών

Η **Μέθοδος Προσδιορισμού** (ή **Προσδιοριστέων**) **Συντελεστών** εφαρμόζεται μόνο σε γραμμικές και μη ομογενείς Σ.Δ.Ε., με σταθερούς συντελεστές της σχέσης της μορφής:

$$\boxed{a_n \cdot y^{(n)}(x) + \cdots + a_1 \cdot y'(x) + a_0 \cdot y(x) = b(x) \neq 0} \quad (1.1),$$

και υπό τη προϋπόθεση ότι η συνάρτηση $b(x)$ στο μη ομογενές μέρος της παραπάνω Σ.Δ.Ε., είναι ή μπορούμε να τη φέρουμε στη μορφή:

$$\boxed{b(x) = e^{a \cdot x} \cdot \left[P_{m_1}(x) \cdot \cos(b \cdot x) + P_{m_2}(x) \cdot \sin(b \cdot x)\right]} \quad (1.2),$$

όπου $P_{m_1}(x), P_{m_2}(x)$ είναι πολυώνυμα του x, βαθμών m_1 και m_2, αντίστοιχα.

Αν ο μιγαδικός, εν γένει αριθμός, $a + i \cdot b$ είναι λύση πολλαπλότητας s (αν δεν είναι λύση, τότε $s = 0$), του χαρακτηριστικού πολυωνύμου της αντίστοιχης ομογενούς Σ.Δ.Ε. για τη Σ.Δ.Ε. της σχέσης (1.1), δηλαδή της:

$$\boxed{a_n \cdot y^{(n)}(x) + \cdots + a_1 \cdot y'(x) + a_0 \cdot y(x) = 0} \quad (1.3),$$

τότε αναζητούμε μία **ειδική** (ή **μερική**) **λύση** για τη Σ.Δ.Ε. της σχέσης (1.1), η οποία θα είναι της μορφής:

$$\boxed{y_\varepsilon(x) = x^s \cdot e^{a \cdot x} \cdot \left[R_{1_k}(x) \cdot \cos(b \cdot x) + R_{2_k}(x) \cdot \sin(b \cdot x)\right]} \quad (1.4),$$

όπου $R_{1_k}(x), R_{2_k}(x)$ είναι πολυώνυμα του x, το καθένα βαθμού $k = \max\{m_1, m_2\}$.

ΦΟΙΤΗΤΙΚΟ ΠΡΟΣΗΜΟ

Δεδομένου ότι η ειδική (ή μερική) λύση της σχέσης (1.4), προφανώς ικανοποιεί τη Σ.Δ.Ε. της σχέσης (1.1), τότε παραγωγίζοντάς την τόσες φορές, όσες και η τάξη της αρχικής Σ.Δ.Ε., αντικαθιστούμε σε αυτήν και υπολογίζουμε τους συντελεστές των πολυωνύμων $R_{1k}(x)$ και $R_{2k}(x)$. Τελικά, αντικαθιστώντας τα πολυώνυμα $R_{1_k}(x)$, $R_{2_k}(x)$ που βρήκαμε στη σχέση (1.4), προσδιορίζουμε τη ζητούμενη ειδική (ή μερική) λύση.

2. Μέθοδος Μεταβολής των Παραμέτρων (Lagrange)

Η **Μέθοδος Μεταβολής των Παραμέτρων** ή **Μέθοδος Lagrange** μπορεί να εφαρμοστεί σε γραμμικές μη ομογενείς Σ.Δ.Ε. n - οστής τάξης της μορφής

$$\boxed{a_n(x)\cdot y^{(n)}(x)+\cdots+a_1(x)\cdot y'(x)+a_0(x)\cdot y(x)=b(x)\neq 0} \quad (2.1),$$

ανεξάρτητα από τη μορφή της συνάρτησης $b(x)$, και ανεξαρτήτως αν η παραπάνω Σ.Δ.Ε. είναι σταθερών είτε μη συντελεστών.

Αρχικά, διαιρώντας τη Σ.Δ.Ε. της σχέσης (2.1) με το συντελεστή $a_n(x)\neq 0$ της n – οστής παραγώγου, τη μετατρέπουμε στη μορφή:

$$\boxed{y^{(n)}(x)+A_{n-1}(x)\cdot y^{(n-1)}(x)+\cdots+A_1(x)\cdot y'(x)+A_0(x)\cdot y(x)=g(x)} \quad (2.2),$$

όπου:

$$\boxed{\begin{cases} A_{n-1}(x)=\dfrac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)} \\ \vdots \\ A_1(x)=\dfrac{a_1(x)}{a_n(x)} \\ A_0(x)=\dfrac{a_0(x)}{a_n(x)} \\ g(x)=\dfrac{b(x)}{a_n(x)} \end{cases}}.$$

ΦΟΙΤΗΤΙΚΟ ΠΡΟΣΗΜΟ

Θεωρώντας ότι οι συναρτήσεις $y_i(x), i = 1,2, \dots, n$ είναι οι n γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς Σ.Δ.Ε. για τη Σ.Δ.Ε. της σχέσης (2.2) (Θεμελιώδες Σύνολο Λύσεων αυτής), δηλαδή της:

$$\boxed{y^{(n)}(x) + A_{n-1}(x) \cdot y^{(n-1)}(x) + \cdots + A_1(x) \cdot y'(x) + A_0(x) \cdot y(x) = 0} \quad (2.3),$$

η λύση της, θα είναι:

$$\boxed{y_o(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) + \cdots + c_n \cdot y_n(x)} \quad (2.4),$$

όπου $c_i, i = 1,2, \dots, n$ είναι αυθαίρετες σταθερές.

Ο **Lagrange** θεώρησε ότι η **ειδική** (ή **μερική**) **λύση** για τη Σ.Δ.Ε. της σχέσης (2.2) θα έχει τη μορφή της σχέσης (2.4), αν στη θέση των σταθερών $c_i, i = 1,2, \dots, n$, τοποθετήσουμε συναρτήσεις του x, δηλαδή τις $c_i(x), i = 1,2, \dots, n$, οπότε η μορφή της θα είναι:

$$\boxed{y_\varepsilon(x) = c_1(x) \cdot y_1(x) + c_2(x) \cdot y_2(x) + \cdots + c_n(x) \cdot y_n(x)} \quad (2.5).$$

Θέτοντας:

$$\boxed{c_1{}'(x) \cdot y_1(x) + c_2{}'(x) \cdot y_2(x) + \cdots + c_n{}'(x) \cdot y_n(x) = 0} \quad (2.6),$$

$$\boxed{c_1{}'(x) \cdot y_1{}^{(k)}(x) + c_2{}'(x) \cdot y_2{}^{(k)}(x) + \cdots + c_n{}'(x) \cdot y_n{}^{(k)}(x) = 0} \quad (2.7),$$

$k = 2, \dots, n-1$, οι διαδοχικές παραγωγίσεις της σχέσης (2.6), μέχρι $n-1$ τάξης, δίνουν:

$$\boxed{y_\varepsilon{}^{(k)}(x) = c_1(x) \cdot y_1{}^{(k)}(x) + c_2(x) \cdot y_2{}^{(k)}(x) + \cdots + c_n(x) \cdot y_n{}^{(k)}(x)} \quad (2.8),$$

$k = 1, \dots, n-1$.

Για την $n-1$ παράγωγο, με αντικατάσταση των σχέσεων (2.6) και (2.7) στη Σ.Δ.Ε. της σχέσης (2.2), λαμβάνουμε ότι:

ΦΟΙΤΗΤΙΚΟ ΠΡΟΣΗΜΟ

$$\boxed{c_1{}'(x)\cdot y_1{}^{(n-1)}(x)+c_2(x)\cdot y_2{}^{(n-1)}(x)+\cdots+c_n(x)\cdot y_n{}^{(n-1)}(x)=g(x)}$$

(2.9).

Οι ισότητες (2.6), (2.7) και (2.9) δημιουργούν ένα γραμμικό, μη ομογενές σύστημα n εξισώσεων με n αγνώστους, τις συναρτήσεις $c_i{}'(x)$, $i=1,2,\dots,n$:

$$\boxed{\begin{cases} c_1{}'(x)\cdot y_1(x)+c_2{}'(x)\cdot y_2(x)+\cdots+c_n{}'(x)\cdot y_n(x)=0 \\ c_1{}'(x)\cdot y_1{}'(x)+c_2{}'(x)\cdot y_2{}'(x)+\cdots+c_n{}'(x)\cdot y_n{}'(x)=0 \\ \vdots \\ c_1{}'(x)\cdot y_1{}^{(n-1)}(x)+c_2{}'(x)\cdot y_2{}^{(n-1)}(x)+\cdots+c_n{}'(x)\cdot y_n{}^{(n-1)}(x)=g(x) \end{cases}}$$

(2.10),

το οποίο έχει πάντα μη μηδενική λύση, διότι η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων είναι η ορίζουσα Wronski των γραμμικώς ανεξάρτητων λύσεων $y_i(x)$, $i=1,2,\dots,n$ για τη Σ.Δ.Ε. της σχέσης (2.2), άρα είναι διάφορη από το μηδέν.

Λύνοντας λοιπόν το παραπάνω σύστημα, προσδιορίζουμε με αόριστη ολοκλήρωση τις συναρτήσεις $c_i(x)$, $i=1,2$. Τις σταθερές ολοκλήρωσης τις λαμβάνουμε ίσες με μηδέν, διότι, μας ενδιαφέρει να βρούμε μία ειδική λύση για μία Σ.Δ.Ε. της σχέσης (2.2).

Αντικαθιστούμε τις συναρτήσεις $c_i(x)$, $i=1,2,\dots,n$ στη σχέση (2.5) και προσδιορίζουμε την ειδική (ή μερική) λύση για τη Σ.Δ.Ε. της σχέσης (2.2).

ΦΟΙΤΗΤΙΚΟ ΠΡΟΣΗΜΟ