Γραμμικές Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις 2ης Τάξης, Ομογενείς, με Σταθερούς Συντελεστές

Στη γραμμική Σ.Δ.Ε. $n-$ τάξης:

$$\boxed{a_n(x)\cdot y^{(n)}(x)+\cdots+a_1(x)\cdot y'(x)+a_0(x)\cdot y(x)=b(x)},$$

με $a_n(x)\neq 0$, για $n=2$ και $b(x)=0$, λαμβάνουμε τη Σ.Δ.Ε.:

$$\boxed{a_2(x)\cdot y''(x)+a_1(x)\cdot y'(x)+a_0(x)\cdot y(x)=0},$$

με $a_2(x)\neq 0$, που είναι μία γραμμική, ομογενής Σ.Δ.Ε. 2ης τάξης ως προς $y(x)$.

Ακόμη, αν θεωρήσουμε ότι οι συντελεστές $a_0(x)$, $a_1(x)$ και $a_2(x)$ είναι σταθερές συναρτήσεις (ανεξάρτητες της μεταβλητής x), δηλαδή:

$$\boxed{\begin{cases} a_2(x)=a \\ a_1(x)=b \\ a_0(x)=c \end{cases}},$$

πραγματικοί αριθμοί, με $a\neq 0$, τότε η τελευταία Σ.Δ.Ε. λαμβάνει τη μορφή:

$$\boxed{a\cdot y''(x)+b\cdot y'(x)+c\cdot y(x)=0} \quad (1).$$

Ισοδύναμα, η Σ.Δ.Ε. της σχέσης (1), γίνεται:

$$\boxed{y''(x)+A\cdot y'(x)+B\cdot y(x)=0} \quad (2),$$

όπου:

$$\boxed{\begin{cases} A=\dfrac{b}{a} \\ B=\dfrac{c}{a} \end{cases}}$$

πραγματικοί αριθμοί.

Η τεχνική επίλυσης αυτών των Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων, στηρίζεται στην υπόθεση εργασίας ότι δέχονται λύσεις της μορφής:

ΦΟΙΤΗΤΙΚΟ ΠΡΟΣΗΜΟ

$$\boxed{y(x) = e^{r \cdot x}} \quad (3).$$

Με αντικατάσταση της παραπάνω έκφρασης και των παραγώγων της:

$$\begin{cases} y'(x) = r \cdot e^{r \cdot x} \\ y''(x) = r^2 \cdot e^{r \cdot x}, \end{cases}$$

η Σ.Δ.Ε. της σχέσης (1) λαμβάνει τη μορφή:

$$a \cdot r^2 \cdot e^{r \cdot x} + b \cdot r \cdot e^{r \cdot x} + c \cdot e^{r \cdot x} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a \cdot r^2 + b \cdot r + c) \cdot e^{r \cdot x} = 0,$$

και αφού η συνάρτηση $e^{r \cdot x}$ είναι μη μηδενική, τότε ο αριθμός r πρέπει να είναι λύση της αλγεβρικής (δευτεροβάθμιας) εξίσωσης:

$$\boxed{a \cdot r^2 + b \cdot r + c = 0} \quad (4).$$

Η εξίσωση της σχέσης (4) καλείται **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** ή **χαρακτηριστική εξίσωση** για τη Σ.Δ.Ε. της σχέσης (1).

Ανάλογα με το πρόσημο της διακρίνουσας:

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c}$$

του τριωνύμου της σχέσης (4), θα έχουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις.

Συγκεκριμένα:

I. Αν $\Delta > 0$, τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της σχέσης (4) έχει δύο πραγματικές και διαφορετικές μεταξύ τους λύσεις r_1 και r_2 (αλγεβρικής πολλαπλότητας 1), δηλαδή $r_1, r_2 \in \mathrm{R}$, με $r_1 \neq r_2$:

$$\boxed{r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}}$$

συνεπώς, αποδεικνύεται ότι οι δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις (θεμελιώδες σύνολο λύσεων) για τη Σ.Δ.Ε. της σχέσης (1), είναι οι συναρτήσεις:

ΦΟΙΤΗΤΙΚΟ ΠΡΟΣΗΜΟ

$$\boxed{\begin{cases} y_1(x) = e^{r_1 \cdot x} \\ y_2(x) = e^{r_2 \cdot x} \end{cases}}.$$

Οπότε, σε αυτή τη περίπτωση, η γενική λύση για τη Σ.Δ.Ε. της σχέσης (1), είναι η:

$y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = c_1 \cdot e^{r_1 \cdot x} + c_2 \cdot e^{r_2 \cdot x}},$$

με c_1, c_2 αυθαίρετες πραγματικές σταθερές.

II. Αν $\Delta = 0$, τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της σχέσης (4) έχει δύο πραγματικές και ίσες μεταξύ τους λύσεις r_1, r_2 (αλγεβρικής πολλαπλότητας 2), δηλαδή ($r_1, r_2 \in \mathrm{R}$, με $r_1 = r_2$):

$$\boxed{r_{1,2} = -\frac{b}{2 \cdot a} = r_0},$$

συνεπώς, αποδεικνύεται ότι οι δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις (θεμελιώδες σύνολο λύσεων) για τη Σ.Δ.Ε. της σχέσης (1), είναι οι συναρτήσεις:

$$\boxed{\begin{cases} y_1(x) = e^{r_0 \cdot x} \\ y_2(x) = x \cdot e^{r_0 \cdot x} \end{cases}}.$$

Οπότε, σε αυτή τη περίπτωση, η γενική λύση για τη Σ.Δ.Ε. της σχέσης (1), είναι η:

$y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow y(x) = c_1 \cdot e^{r_0 \cdot x} + c_2 \cdot x \cdot e^{r_0 \cdot x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = (c_1 + c_2 \cdot x) \cdot e^{r_0 \cdot x}},$$

με c_1, c_2 αυθαίρετες πραγματικές σταθερές.

III. Αν $\Delta < 0$, τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της σχέσης (4) έχει δύο

ΦΟΙΤΗΤΙΚΟ ΠΡΟΣΗΜΟ

συζυγείς μιγαδικές λύσεις ($r_1, r_2 \in \mathbb{C}$):

$$\boxed{r_{1,2} = \frac{-b \pm i \cdot \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}},$$

δηλαδή της μορφής:

$$\boxed{r_{1,2} = p \pm i \cdot q}, q \neq 0,$$

με:

$$\boxed{\begin{cases} p = -\dfrac{b}{2 \cdot a} \\ q = \dfrac{\sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} \end{cases}}$$

το πραγματικό και το φανταστικό, αντίστοιχα, μέρος αυτών.

Συνεπώς, αποδεικνύεται ότι οι δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις (θεμελιώδες σύνολο λύσεων) για τη Σ.Δ.Ε. της σχέσης (1), είναι οι συναρτήσεις:

$$\boxed{\begin{cases} y_1(x) = e^{p \cdot x} \cdot \cos(q \cdot x) \\ y_2(x) = e^{p \cdot x} \cdot \sin(q \cdot x) \end{cases}},$$

Οπότε, σε αυτή τη περίπτωση, η γενική λύση για τη Σ.Δ.Ε. της σχέσης (1), είναι η:

$$y(x) = c_1 \cdot y_1(x) + c_2 \cdot y_2(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x) = c_1 \cdot e^{p \cdot x} \cdot \cos(q \cdot x) + c_2 \cdot e^{p \cdot x} \cdot \sin(q \cdot x) \Rightarrow$$

$$\boxed{y(x) = e^{p \cdot x} \cdot [c_1 \cdot \cos(q \cdot x) + c_2 \cdot \sin(q \cdot x)]},$$

με c_1, c_2 αυθαίρετες πραγματικές σταθερές.

Συνοψίζοντας τις παραπάνω περιπτώσεις, οι λύσεις για μία γραμμική, ομογενή Σ.Δ.Ε. 2ης τάξης, με σταθερούς συντελεστές ως προς $y(x)$ της μορφής

ΦΟΙΤΗΤΙΚΟ ΠΡΟΣΗΜΟ

(1):

$$\boxed{a \cdot y''(x) + b \cdot y'(x) + c \cdot y(x) = 0},$$

είναι:

$$\boxed{y(x) = \begin{cases} c_1 \cdot e^{r_1 \cdot x} + c_2 \cdot e^{r_2 \cdot x}, \text{όταν } r_1, r_2 \in \mathrm{R}, \text{με } r_1 \neq r_2 \\ (c_1 + c_2 \cdot x) \cdot e^{r_0 \cdot x}, \text{όταν } r_1, r_2 \in \mathrm{R}, \text{με } r_1 = r_2 = r_0 \\ e^{p \cdot x} \cdot [c_1 \cdot \cos(q \cdot x) + c_2 \cdot \sin(q \cdot x)], \text{όταν } r_1, r_2 \in \mathrm{C}, \text{με } r_{1,2} = p \pm i \cdot q \end{cases}}$$

Συνδυασμός των παραπάνω περιπτώσεων ενδέχεται να προκύψει για την επίλυση μίας γραμμικής και ομογενούς Σ.Δ.Ε. τάξης $n > 2$, με σταθερούς συντελεστές, της μορφής:

$$\boxed{a_n \cdot y^{(n)}(x) + \cdots + a_1 \cdot y'(x) + a_0 \cdot y(x) = 0}.$$

ΦΟΙΤΗΤΙΚΟ ΠΡΟΣΗΜΟ